راهنما و حل فعالیت ها؛ کاردرکلاس ها و تمرین های
فصل ۱ حسابان (۱)
(براساس نسخه پیش نویس کتاب)

فصل ۱

جبر و معادله

تهیه و تنظیم: شهرام قلندری

۰۹۱۷۳۶۰۳۳۰۸

@mmgh51

با تشکر فراوان از گروه های تلگرامی:

فقط حسابان ۱

بررسی کتاب حسابان یازدهم

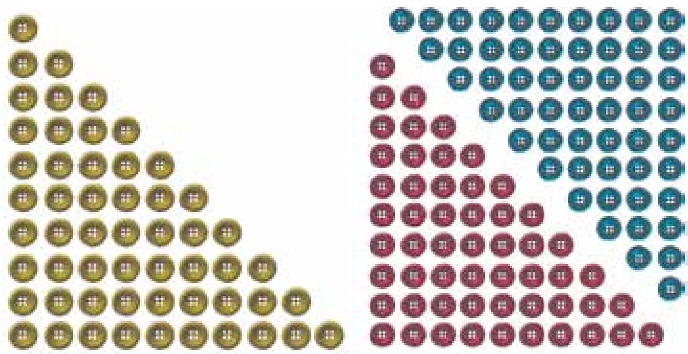
درس ۱

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

در سال قبل با مفهوم دنباله و دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدید. اعداد طبیعی ... , ۳ , ۲ , ۱ یک دنباله حسابی با قدر نسبت یک می‌باشد. روش به‌دست آوردن مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n می‌تواند ایده مناسبی باشد تا به یک دستور برای مجموع جملات دنباله حسابی برسیم.

فعالیت

تعدادی دگمه داریم که به شکل روبه‌رو آرایش شده‌اند. تعداد این دگمه‌ها چند تاست؟



۱ یکی از راه‌ها، شمارش تعداد دگمه‌ها در هر ردیف است که مجموع آن برابر است با :

$\boxed{۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷=\cdots}$ → $۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰=۵۵$

۲ راه دیگر استفاده از شهود و تجسم است.

تعداد ردیف‌ها ۱۰ و تعداد دگمه‌ها در هر ردیف ۱۱ است پس تعداد کل دگمه‌ها برابر ۱۱۰ است و چون تعداد دگمه‌های آبی و قرمز برابر است پس :

$$\text{تعداد دگمه‌های آبی} = \frac{\text{تعداد کل دگمه‌ها}}{۲} = ۵۵$$

۳ برای مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n مراحل روبه‌رو را انجام داده‌ایم. در هر مرحله چگونگی آن را توضیح دهید.

$$S = ۱ + ۲ + ۳ + \dots \dots + (n-۱) + n$$

$$S = n + (n-۱) + \dots + ۳ + ۲ + ۱$$

$$۲S = \underbrace{(n+۱)+(n+۱)+\dots+(n+۱)+(n+۱)}_{\text{تا } n}$$

$$۲S = n(n+۱)$$

$$S = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$۱+۲+۳+.....+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

✤ **مثال :** روی محیط دایره‌ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمایز را به‌دست آورید.

✤ **حل :** نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به‌غیر از نقطه اول) ۱۸ وتر به‌دست می‌آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم ۱۷ وتر حاصل می‌شود. با ادامه این عمل تعداد وترهای حاصل برابر است با :

$$۱۹+۱۸+۱۷+...+۲+۱=\frac{۱۹}{۲}(۱+۱۹)=۱۹۰$$

✤ **تذکر :** این مسئله را با استفاده از ترکیبات نیز می‌توان حل کرد. آن را حل کرده و جواب‌ها را در دو روش با هم مقایسه کنید.

$$\binom{۲۰}{۲}=\frac{۲۰!}{۲!\times ۱۸!}=\frac{۲۰\times ۱۹\times ۱۸!}{۲!\times ۱۸!}=\frac{۲۰\times ۱۹}{۲}=۱۹۰$$

فعالیت

دنباله حسابی زیر که در آن a جمله اول، d قدر نسبت و n تعداد جملات آن است را در نظر بگیرید.

$$a\,,\,a+d\,,\,a+۲d\,,\,...\,,\,a+(n-۲)d\,,\,a+(n-۱)d$$

مجموع جملات این دنباله را S_n می‌نامیم و می‌توان نوشت :

$$S_n=\underline{a}+\underline{(a+d)}+\underline{(a+۲d)}+...+\underline{(a+(n-۲)d)}+\underline{(a+(n-۱)d)}$$

۱ مجدداً جملات S_n را از آخر به اول بنویسید و با جمع جملات متناظر دو عبارت اخیر، $۲S_n$ را به‌دست آورده و نتیجه بگیرید.

$$S_n=\underline{(a+(n-۱)d)}+\underline{(a+(n-۲)d)}+\underline{(a+(n-۳)d)}+\cdots+\underline{(a+d)}+\underline{a}$$

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]$$

✤ **مثال :** مجموع صد جمله اول دنباله حسابی ......, ۳ , ۷ , ۱۱ , ۱۵ را به‌دست آورید.

✤ **حل :** جمله اول ۳ و تعداد جمله ۱۰۰ و قدرنسبت جملات ۴ می‌باشد و با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی می‌توان نوشت :

$$S_{۱۰۰}=\frac{۱۰۰}{۲}\left[(۲\times ۳)+(۹۹\times ۴)\right]=۵۰\times ۴۰۲=۲۰۱۰۰$$

ابتکار گاوسی

در ریاضیات آنچه مهم است فکر کردن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. ریاضیات راهی برای اندیشیدن و روشی برای استدلال و درست فکر کردن است. استدلال وسیله‌ای است که به کمک آن می‌توان از روی اطلاعاتی که داریم حقایقی را کشف کنیم. البته ریاضیات به تجربه و مشاهده نیز مربوط می‌شود، ولی قسمت اعظم آن همان اندیشیدن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. گاوس ریاضیدان آلمانی ده ساله بود. روزی معلم از دانش‌آموزان کلاس خواست که مداد و کاغذ بردارند و حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ را به‌دست آورند. چند دقیقه نگذشته بود که معلم، گاوس را دید که به کار دیگری مشغول است. از او پرسید : چرا مسئله را حل نمی‌کنی؟ او جواب داد : تمام شد. معلم با ناراحتی گفت : این غیر ممکن است. ولی گاوس گفت : خیلی هم آسان بود. اول چنین نوشتم : $۱+۲+۳+...+۹۸+۹۹+۱۰۰$

و بعد چنین : $۱۰۰+۹۹+۹۸+۹۷+...+۳+۲+۱$

و جفت جفت از اول با آخر جمع کردم : $۱۰۱+۱۰۱+۱۰۱+...+۱۰۱+۱۰۱+۱۰۱$

بدین ترتیب ۱۰۰ تا عدد ۱۰۱ به‌دست آوردم که حاصل آنها ۱۰۱۰۰ می‌شود و چون دو بار مجموع ۱ تا صد را حساب کردم عدد ۱۰۱۰۰ را بر دو تقسیم کردم و ۵۰۵۰ به دست آمد. بنابراین حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ برابر ۵۰۵۰ می‌شود.

$۱۲,۱۶,۲۰,۲۴,\cdots,۹۶$ $\quad a_n = a_1 + (n-1)d = ۱۲ + (n-1)۴ = ۴n + ۸ \Rightarrow ۴n + ۸ = ۹۶ \Rightarrow n = ۲۲$

جواب سوال ۲ کار در کلاس:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_1 + a_n) = \frac{۲۲}{۲}(۱۲ + ۹۶) = ۱۱۸۸$$

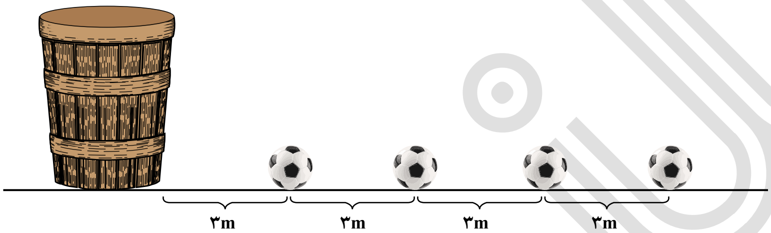
کار در کلاس

$$S_n = \frac{n}{۲}\left(۲a_1 + (n-1)d\right) = \frac{n}{۲}\left(a_1 + \underline{a_1 + (n-1)d}\right) = \frac{n}{۲}(a_1 + a_n)$$

۱ نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر a_1 و a_n به‌ترتیب جملات اول و آخر باشند $\quad S_n = \frac{n}{۲}(a_1 + a_n)$

۲ مجموع همه عددهای طبیعی مضرب ۴ دو رقمی را به‌دست آورید.

مثال : در یک مسابقه تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد ۳ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی بدود و آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیندازد. اگر این دونده مجموعاً ۹۱۸ متر دویده باشد؛ تعیین کنید او چند توپ در سبد انداخته است؟



حل : دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید مسافت $۶ = ۳ + ۳$ متر را طی کند و برای توپ دوم باید ۱۲متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و ...، بنابراین مسافت‌های طی شده در هر مرحله تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدر نسبت ۶ می‌دهد. اگر n تعداد توپ‌های انداخته شده در سبد باشد از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم :

$$S = \frac{n}{۲}(۲a + (n-1)d) \qquad \frac{n}{۲}(۱۲ + ۶n - ۶) = \frac{n}{۲}(۶n + ۶) = \frac{n}{۲} \times ۶(n+1) = ۳n(n+1) = ۹۱۸$$

$$۹۱۸ = \frac{n}{۲}(۱۲ + (n-1)۶) \Rightarrow ۳۰۶ = n(n+1) \Rightarrow ۱۷ \times ۱۸ = n(n+1) \Rightarrow n = ۱۷$$

مجموع جملات دنباله هندسی

فعالیت

۱ قدر نسبت و مجموع n جمله اول دنباله هندسی زیر را به‌دست آورید. $\quad (a \neq ۰)$

$a, a, a, \ldots, a \qquad q = ۱ \quad , \quad S_n = a + a + a + \cdots + a = na$

۲ دنباله هندسی زیر را در نظر بگیرید. $\quad (q \neq ۱)$

$a, aq, aq^۲, \ldots$

الف) جمله nام دنباله چیست؟

$$a_n = a q^{n-1}$$

ب) فرض کنیم مجموع n جملهٔ اولیه دنباله هندسی S_n باشد :

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

طرفین رابطه را در q ضرب می‌کنیم :

$$S_n q = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

$\boxed{S_n - S_n q}$ $S-Sq$ را تشکیل دهید و پس از ساده‌سازی نتیجه بگیرید :

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_n - S_n q = a - aq^n \Rightarrow S_n(1-q) = a(1-q^n) \xrightarrow{q\neq 1} S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

کار در کلاس

مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنباله هندسی زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{8}(1-2^{10})}{1-2} = \frac{1}{8}(2^{10}-1) = \frac{1023}{8}$$

مثال : برای محافظت از تابش مضر مواد رادیواکتیویته لایه‌های محافظی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آنها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد مضر حداقل ۹۷ درصد کاهش یابد؟

حل : اولین لایه، مواد مضر را نصف می‌کند. دومین لایه از نصف باقی‌مانده $\frac{1}{4}$ مواد مضر را برطرف می‌کند و ... دنباله این اعداد به‌صورت زیر خواهد بود :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

این یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ می‌باشد. می‌خواهیم بدانیم چند جمله از این دنباله جمع شود تا حاصل حداقل ۹۷ درصد شود.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \geq \frac{100}{3} \simeq 33/3$$

با آزمایش اعداد طبیعی در نامعادله اخیر، و اینکه $64 = 2^6$ درمی‌یابیم که حداقل مقدار n برابر ۶ خواهد بود. پس تعداد لایه‌ها باید حداقل شش تا باشد.

در کشور ما ایران در سده‌های چهارم و پنجم هجری، بسیاری از ریاضی‌دانان ایرانی،به بررسی دنباله‌ها پرداخته‌اند از جمله «ابوریحان بیرونی» در کتاب خود به نام «آثار الباقیه عن‌القرون الخالیه» مسئله معروف صفحه شطرنج را که در واقع مسئله‌ای مربوط به یک دنباله هندسی است که جملهٔ اول آن واحد و تعداد جمله‌ها ۶۴ می‌باشد، حل کرده است و با استدلال دقیق، مجموع جمله‌های این دنباله را به‌دست آورده است ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵. دربارهٔ صفحه شطرنج، داستانی وجود دارد. وقتی مخترع شطرنج، کشف خود را به شاه عرضه کرد، شاه از او خواست پاداشی بخواهد، دانشمند پاسخ داد : خانه اول شطرنج، یک دانه گندم به من بدهید و برای خانه دوم، دو دانهٔ گندم و برای خانه سوم، چهار دانهٔ گندم و همین طور برای هر خانه دو برابر خانهٔ پیش از آن گندم به من بدهید تا به خانه شصت و چهارم برسد. شاه با ساده‌لوحی فرمان داد یک کیسه گندم به این مرد بدهید. ولی او نپذیرفت و تقاضا کرد پس از محاسبهٔ دقیق، گندم را به او بدهند و پس از محاسبه، عددی را که در بالا آوردیم پیدا شد. که اگر در تمام سطح کره زمین (یعنی هر جا که خشکی باشد) گندم بکارند این مقدار گندم به‌دست نمی‌آید. ابوریحان بیرونی با استدلال به این نتیجه رسید که مقدار گندم‌ها برابر $2^{64}-1$ و برای محسوس کردن این عدد می‌گوید : در سطح کره زمین ۲۳۰۵ کوه را در نظر می‌گیریم، اگر از هر کوه ۱۰۰۰۰ رود خارج شود، در طول هر رودخانه ۱۰۰۰ قاطر حرکت کند و هر قاطر ۸ کیسه گندم قرار داده باشیم و در هر کیسه ۱۰۰۰۰ دانه گندم باشد. آن وقت عدد همهٔ این گندم‌ها از تعداد گندم‌های صفحه شطرنج همچنان کوچک‌تر می‌شود.

$S = ۱+۲+۴+۸+۱۶+\cdots+۲^{۶۳}$

$S_n = \frac{a(۱-q^n)}{۱-q} = \frac{۱(۱-۲^{۶۴})}{۱-۲} = ۲^{۶۴}-۱$ تعداد دانه های گندم

کار در کلاس

با توجه به داستان جایزه‌ای که مخترع شطرنج می‌خواست :

الف) اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم این جایزه چند گرم می‌شود[۱]؟ $۲^{۶۴}-۱=۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵$

وزن دانه های گندم به گرم

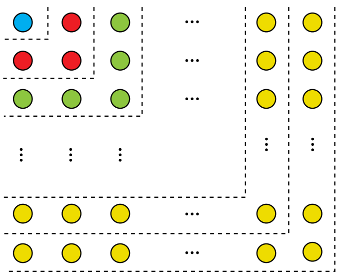
ب) نشان دهید جایزهٔ او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن خواهد شد.

وزن دانه های گندم به تن $۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵ \div ۱۰۰۰۰۰۰ = ۱۸٬۴۴۶٬۷۴۴٬۰۷۳٬۷۰۹/۵۵۱۶۱۵$

هجده هزار و چهارصد و چهل و شش میلیارد و ....

تمرین

جواب تمرین ها در صفحه بعد



۱ در دنبالهٔ حسابی . . . , ۱۱ , ۸ , ۵ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

۲ الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$۱+۳+۵+\ldots+(۲n-۱)=$

ب) با استفاده از فرمول درستی جواب خود را در قسمت قبل بررسی کنید.

۳ مجموع همهٔ اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می‌شود؟

۴ در ۲۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جملهٔ اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

۵ جملهٔ عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n = ۲^{n-۱}$ می‌باشد. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع ۲۵۵ شود؟

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

۷ برای عددی حقیقی a و عدد طبیعی n ؛

الف) حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$۱+a+a^۲+\cdots+a^{n-۱}$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید :

$a^n-۱=(a-۱)(a^{n-۱}+\cdots+a^۲+a+۱)$

۱ــ این مسئله به نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی با روش خاص خود آن را حل کرده است. (ترجمه میزان الحکمه، ص ۷۷)

جواب تمرین ۱ :

$$a_1 = 5 \quad , \quad d = 3 \quad , \quad S_n > 493$$

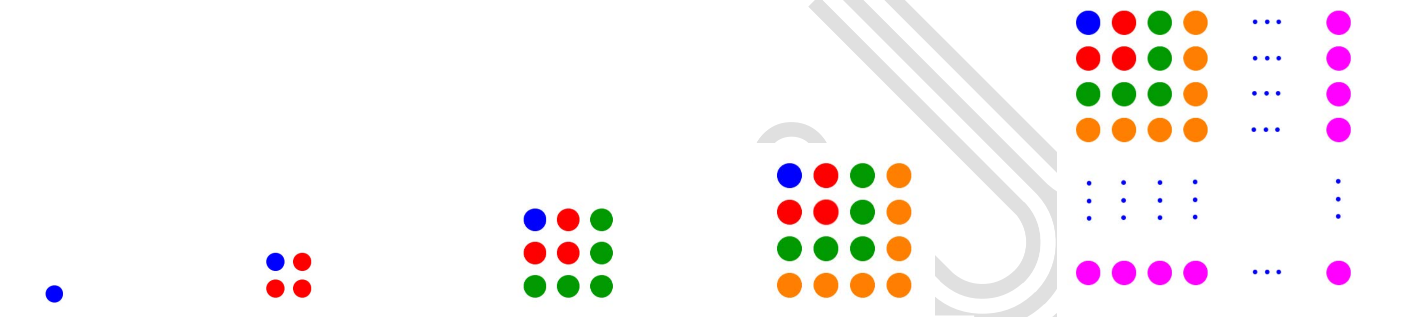
$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}\left[10 + (n-1)3\right] = \frac{n}{2}(3n+7) \Rightarrow \frac{n}{2}(3n+7) > 493 \Rightarrow n(3n+7) > 986$$

اکنون n را می توانیم به روش حدس و آزمایش به دست آوریم:

n	10	15	17	18
$n(3n+7)$	370	780	986	1098

$$\Rightarrow \quad n \geq 18$$

جواب تمرین ۲ : الف)



$$1 = 1 = 1^2 \qquad 1+3 = 4 = 2^2 \qquad 1+3+5 = 9 = 3^2 \qquad 1+3+5+7 = 16 = 4^2 \qquad 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

ب)

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1+2n-1) = \frac{n}{2}(2n) = n^2$$

جواب تمرین ۳:

$$102, 108, 114, \cdots, 996$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 996 = 102 + (n-1)6 \Rightarrow 996 - 102 = 6(n-1) \Rightarrow n-1 = \frac{894}{6} = 149 \Rightarrow n = 150$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{150}{2}(102 + 996) = 82350$$

جواب تمرین ۴ :

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=135 \Rightarrow 135=S_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+9(2d)) \Rightarrow 2a_1+18d=27$$

$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=150 \Rightarrow 150=S_{10}=\frac{10}{2}(2a_2+9(2d))=5(2(a_1+d)+18d) \Rightarrow 2a_1+20d=30$$

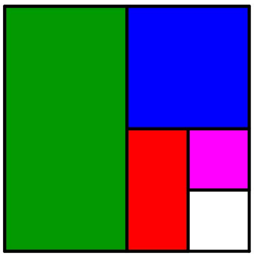
$$\begin{cases}2a_1+18d=27\\ 2a_1+20d=30\end{cases} \Rightarrow a_1=0 \quad , \quad d=\frac{3}{2}$$

جواب تمرین ۵ :

$$a_n=2^{n-1} : 1,2,4,8,16,\cdots \qquad , \qquad S_n=255 \;:\; n=?$$

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow 255=\frac{1(1-2^n)}{1-2} \Rightarrow 255=2^n-1 \Rightarrow 2^n=256=2^8 \Rightarrow n=8$$

جواب تمرین ۶ :

۱ 

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots \qquad , \qquad S_n\ge\frac{99}{100}\times 1$$

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n} \Rightarrow 1-\frac{1}{2^n}\ge\frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{100}\ge\frac{1}{2^n} \Rightarrow 2^n\ge 100 \Rightarrow n\ge 7$$

جواب تمرین ۷:

$$1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}$$

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{1(1-a^n)}{1-a}=\frac{a^n-1}{a-1} \qquad : a\ne 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}_{1}=\frac{a^n-1}{a-1} \Rightarrow a^n-1=(a-1)(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})=(a-1)(a^{n-1}+\cdots+a^2+a+1)$$

درس ۲

معادلات درجه دوم

در سال‌های قبل با مفهوم معادله و حل معادله‌های درجه اول و درجه دوم آشنا شدید. هر معادله درجه دوم به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ است $(a\neq 0)$ که جواب‌های آن در صورت وجود از رابطه $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ به‌دست می‌آیند. در این بخش با برخی از انواع معادلات، روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادله درجه دوم و نکات تکمیلی آشنا خواهید شد.

کار در کلاس

۱ معادله $3x^2=5x-2$ را حل کنید.

روش ۱: $\Delta=b^2-4ac=25-24=1$ $\quad 3x^2-5x+2=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5\pm1}{6}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{5+1}{6}=\frac{6}{6}=1\\ x_2=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\end{cases}$$

روش ۲: $3x^2-5x+2=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(3x-3)(3x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}3x=3\Rightarrow x=1\\ 3x=2\Rightarrow x=\frac{2}{3}\end{cases}$$

۲ اگر $x=-1$ یک ریشه معادله $4x^2-mx-7=0$ باشد، ریشه دیگر و m کدام است؟

$$x=-1\Rightarrow 4+m-7=0\Rightarrow m=3\ :\ 4x^2-3x-7=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}(4x+4)(4x-7)=0\Rightarrow\begin{cases}4x=-4\Rightarrow x=-1\\ 4x=7\Rightarrow x=\frac{7}{4}\end{cases}$$

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

فعالیت

۱ جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

$\frac{c}{a}$	$\frac{-b}{a}$	c	b	a	ضرب ریشه‌ها (P)	جمع ریشه‌ها (S)	مقدار ریشه‌ها		$ax^2+bx+c=0$
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	-5	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$3x^2-5x+2=0$
$\frac{-7}{4}$	$\frac{3}{4}$	-7	-3	4	$\frac{-7}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$	-1	$4x^2-3x-7=0$
1	2	1	-2	1	1	2	1	1	$x^2-2x+1=0$
$\frac{-8}{5}$	$\frac{-6}{5}$	-8	6	5	$\frac{-8}{5}$	$\frac{-6}{5}$	$\frac{4}{5}$	-2	$5x^2+6x-8=0$

۲ الف) در جدول بالا بین جمع ریشه‌ها و ضرایب معادله چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟ جمع ریشه ها می شود $\frac{-b}{a}$

ب) در جدول بالا بین ضرب ریشه‌ها و ضرایب معادله چه ارتباطی وجود دارد؟ ضرب ریشه ها می شود $\frac{c}{a}$

۳ اگر x_1 و x_2 ریشه‌ها و S و P به ترتیب جمع و ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، نشان دهید :

$$S=x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

$$P=x_1x_2=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

به‌طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد روابط زیر برقرارند.

$$S=\frac{-b}{a}\ ,\ P=\frac{c}{a}$$

مثال : با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها اگر $x=-1$ یک ریشه معادله $4x^2-mx-7=0$ باشد ریشه دیگر و مقدار m را به‌دست آورید.

حل : اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $4x^2-mx-7=0$ باشد داریم :

$$x_1x_2=\frac{c}{a}\Rightarrow(-1)x_2=\frac{-7}{4}\Rightarrow x_2=\frac{7}{4}$$

از طرفی با استفاده از جمع ریشه‌ها داریم :

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}\Rightarrow -1+\frac{7}{4}=\frac{m}{4}\Rightarrow m=3$$

فعالیت

۱ برای تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های آن ۲ و ۳- باشد راه حل زیر ارائه شده است. مراحل حل را توضیح دهید.

$$\begin{cases} x=۲ \\ x=-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \\ x+۳=۰ \end{cases} \Rightarrow (x-۲)(x+۳)=۰ \Rightarrow x^{۲}+x-۶=۰$$

۲ اگر $x=\alpha$ و $x=\beta$ ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، با استفاده از روش قسمت قبل معادله را مشخص کنید.

به‌طور کلی اگر α و β دو عدد دلخواه و $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^{۲}-Sx+P=۰$ هستند.

کار در کلاس

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$ باشند.

$$S=(۲-\sqrt{۳})+(۲+\sqrt{۳})=۴$$

$$P=(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})=۴-۳=۱$$

$$x^{۲}-Sx+P=۰ \Rightarrow x^{۲}-۴x+۱=۰$$

مثال : محیط یک مستطیل ۳۳ سانتی‌متر و مساحت آن ۶۵ سانتی‌مترمربع است. ابعاد مستطیل را به‌دست آورید.

حل : فرض کنید طول و عرض مستطیل به ترتیب $x_۱$ و $x_۲$ باشند، داریم :

$$x_۱+x_۲=\frac{۳۳}{۲} \quad , \quad x_۱x_۲=۶۵$$

معادله درجه دومی تشکیل می‌دهیم که در آن $S=\frac{۳۳}{۲}$ و $P=۶۵$ باشد و آن را حل می‌کنیم.

$$x^{۲}-Sx+P=۰ \Rightarrow x^{۲}-\frac{۳۳}{۲}x+۶۵=۰ \Rightarrow ۲x^{۲}-۳۳x+۱۳۰=۰$$

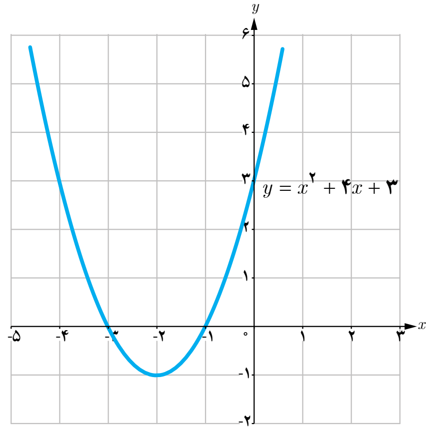
از حل معادله اخیر $x=۱۰$ یا $x=\frac{۱۳}{۲}$ به‌دست می‌آید در نتیجه، طول و عرض مستطیل به‌ترتیب ۱۰ و $\frac{۱۳}{۲}$ می‌باشد.

صفر های تابع

صفحه‌های تابع

فعالیت

نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=x^2+4x+3$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.



۱ معادله $f(x)=0$ را حل کنید و جواب‌های آن را به‌دست آورید.

$$(x+1)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$$

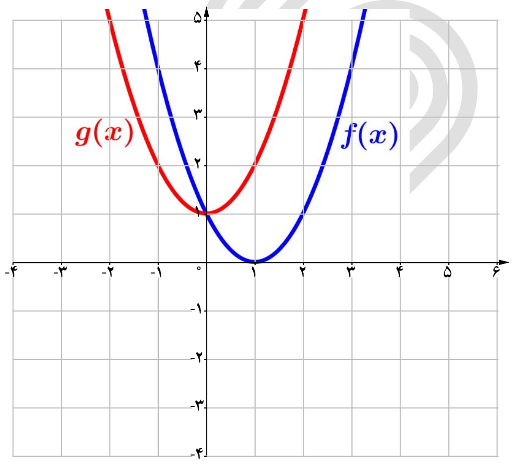
۲ محل تلاقی (برخورد) نمودار تابع f با محور طول‌ها چه رابطه‌ای با جواب‌های معادله $f(x)=0$ دارد؟

طول های محل تلاقی نمودار تابع f با محور xها؛ جواب های معادله f(x)=0 هستند.

صفرهای تابع

برای یک تابع $f(x)$ جواب‌های معادله $f(x)=0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم، صفرهای تابع f آن مقادیری از x (در دامنه f) هستند که به ازای آنها $f(x)$ صفر می‌شود. اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم صفرهای f طول‌های نقاط تلاقی نمودار با محور xهاست.

کار در کلاس



۱ نمودار سهمی‌های $f(x)=x^2-2x+1$ و $g(x)=x^2+1$ را رسم کنید.

۲ با توجه به نمودار در مورد جواب‌های معادله‌های $f(x)=0$ و $g(x)=0$ چه می‌توان گفت؟

معادله f(x)=0 یک جواب دارد: x=1

معادله g(x)=0 جوابی ندارد.

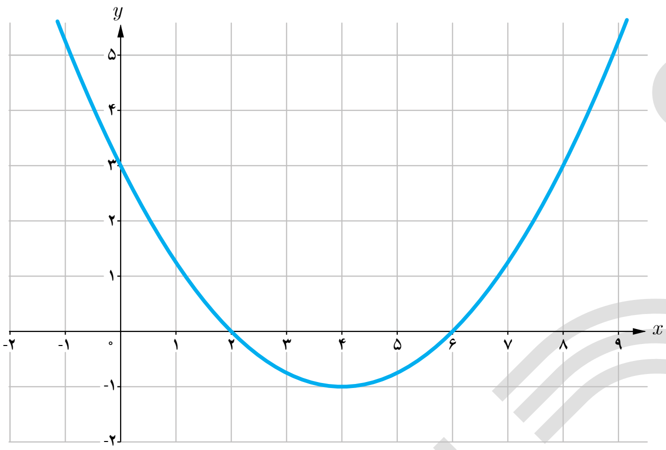
✤ **مثال :** اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ باشند نشان دهید

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$$

✤ **حل :** از آنجا که x' و x'' صفرهای تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ هستند پس x' و x'' جواب‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ هستند و داریم.

$$a(x-x')(x-x'')=a(x^2-(x'+x'')x+x'x'')$$
$$=a(x^2-Sx+p)$$
$$=a[x^2-(\frac{-b}{a})x+\frac{c}{a}]$$
$$=ax^2+bx+c$$

✤ **مثال :** اگر نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ به‌صورت زیر باشد ضابطه سهمی را مشخص کنید.



روش اول

از آنجا که $x'=2$ و $x''=6$ صفرهای تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ هستند با استفاده از رابطه‌ای که درمثال قبل آمده است می‌توان نوشت :

$$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-2)(x-6)$$

می‌دانیم نمودار تابع از نقطه $(0,3)$ می‌گذرد پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع صدق می‌کند و داریم.

$$3=a(0-2)(0-6)\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

معادله سهمی به‌صورت $y=\frac{1}{4}(x-2)(x-6)$ می‌باشد که پس از ساده‌سازی به‌صورت $y=\frac{1}{4}x^2-2x+3$ نوشته می‌شود.

روش دوم

از آنجا که $f(0)=3$ و می‌توان نوشت $f(x)=ax^2+bx+3$ حال از روابط بین صفرهای تابع استفاده می‌کنیم.

$$\frac{c}{a}=12\Rightarrow\frac{3}{a}=12\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

از طرفی از آنجا که $\frac{-b}{a}=8$ و $a=\frac{1}{4}$ پس $b=-2$ و در نتیجه $y=\frac{1}{4}x^2-2x+3$

روش سوم

رأس سهمی : $(4,-1)\Rightarrow y=a(x-4)^2-1$

مختصات یک نقطه از سهمی $\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$: $0=a(2-4)^2-1\Rightarrow 4a=1\Rightarrow a=\frac{1}{4}\Rightarrow y=\frac{1}{4}(x-4)^2-1$

کار در کلاس

هر یک از شکل‌های زیر سهمی به معادله $f(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است.

۱ با توجه به معادله $f(x)=0$ نمودارهای متناظر هر یک از ویژگی‌های زیر را مشخص کنید.

الف) دو ریشهٔ مثبت دارد. (شکل‌های ۸ و ۹)

ب) دو ریشهٔ منفی دارد. (۴)

پ) f یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد. (۱ و ۲)

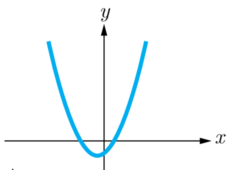
ت) f ریشه ندارد. (۵ و ۷)

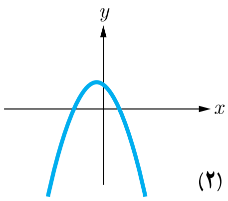
ث) f ریشه ندارد و دارای ماکزیمم است. (۷)

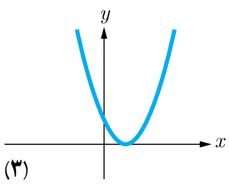
ج) f یک ریشه دارد. (۳)

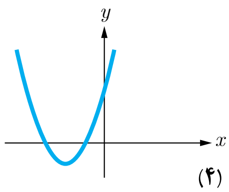
چ) حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است. (۳ و ۸ و ۹)

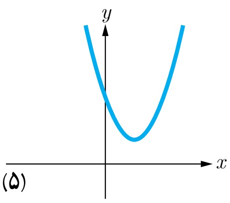
ح) حاصل جمع ریشه‌ها منفی است. ( ) ۱ و ۲ و ۴ و ۶

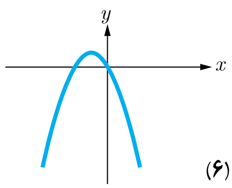

(۱)

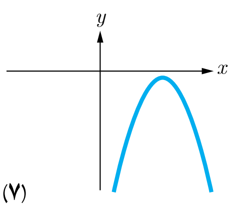

(۲)

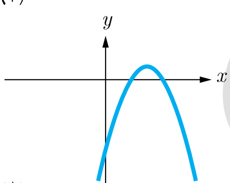

(۳)

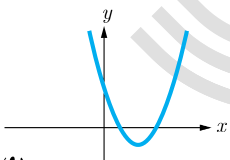

(۴)


(۵)


(۶)


(۷)


(۸)


(۹)

۲ با توجه به نمودارهای داده شده جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

ویژگی / شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تعداد صفر f	۲	۲	۱	۲	۰	۲	۰	۲	۲
علامت a	+	−	+	+	+	−	−	+	+
علامت b	+	−	−	+	−	−	+	+	−
علامت c	−	+	+	+	+	۰	−	−	+

−

تذکر : ستون نظیر شکل پنجم را با توجه به استدلال زیر کامل کرده‌ایم. از آنجا که منحنی سهمی محور xها را قطع نکرده است پس تعداد صفرهای تابع متناظر آن صفر خواهد بود و چون شاخه‌های منحنی به سمت بالا هستند علامت a مثبت است. از آنجا که منحنی، محور yها را در نقطه با عرض مثبت قطع می‌کند پس $c>0$ طول نقطه مینیمم تابع، مقداری مثبت است پس $\frac{-b}{2a}$ و از مثبت بودن a و رابطه اخیر نتیجه می‌شود $b<0$.

$\frac{-b}{2a}>0$

روش دیگر (تجزیه):

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1)$$
$$= (x-1)(x^2-4)$$

✤ **مثال :** اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع $p(x)=x^3-x^2-4x+4$ باشد سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

✤ **حل :** از آنجا که $x=2$ یک صفر تابع $p(x)$ است می‌توان نشان داد $p(x)$ عاملی به‌صورت $x-2$ دارد با تقسیم $p(x)$ بر $x-2$ عامل دیگر $p(x)$ را می‌یابیم.
و می‌توان نوشت $p(x)=(x-2)(x^2+x-2)$ از حل معادله $p(x)=0$ داریم.

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-4x+4 & x-2 \\ \hline -\quad - & x^2+x-2 \\ x^3-2x^2 & \\ \hline x^2-4x & \\ -\quad - & \\ x^2-2x & \\ \hline -2x+4 & \\ -\quad - & \\ -2x+4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

در نتیجه صفرهای تابع p ، -2 , 2 , 1 می‌باشند.

کار در کلاس

$$f(-2) = -8 + 4k + 2 - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^3+kx^2-x-2$ برابر (-2) باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-x-2 & x+2 \\ \hline -\quad - & x^2-1 \\ x^3+2x^2 & \\ \hline -x-2 & \\ -\quad - & \\ -x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow (x+2)(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

✤ **مثال :** صفرهای تابع f با ضابطه $f(x)=(x^2-1)^2+(x^2-1)-2$ را به‌دست آورید.

✤ **حل :** هر چند معادله $f(x)=0$ از درجهٔ چهار است امّا می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب آن را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. با فرض $x^2-1=t$، می‌توان نوشت $t^2+t-2=0$. اکنون با حل این معادله و یافتن t با استفاده از عبارت $x^2-1=t$ مقادیر x را می‌یابیم.

$$t^2+t-2=0 \Rightarrow t=1 \text{ یا } t=-2$$

$$\begin{cases} t=1 \Rightarrow x^2-1=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ t=-2 \Rightarrow x^2-1=-2 \Rightarrow x^2=-1 \text{ غیرقابل قبول} \end{cases}$$ (جواب حقیقی ندارد)

پس تنها صفرهای قابل قبول برای تابع f، $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ می‌باشد.

در حل برخی از معادلات می‌توان با تغییر متغیر مناسب آن را به یکی از انواع معادلاتی که می‌شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییرِ متغیرِ صورت گرفته، مقادیر متغیرِ معادله اولیه را یافت.

کار در کلاس

همهٔ صفرهای تابع $f(x)=x^۴-۱۰x^۲+۱۶$ را به‌دست آورید.

$x^۲=t:\ t^۲-۱۰t+۱۶=۰ \Rightarrow t=۲\ ,\ t=۸$

$t=۲ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$

$t=۸ \Rightarrow x^۲=۸ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۸}=\pm۲\sqrt{۲}$

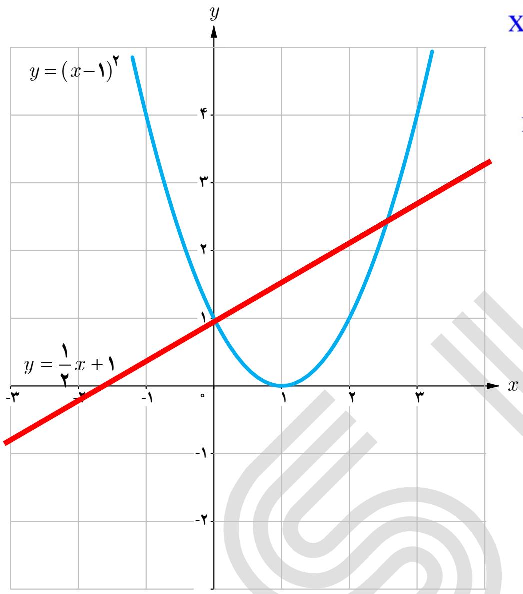
روش هندسی حل معادلات

فعالیت

نمودار رو باید دانش آموز رسم کنه... بهتره معادله خط رنگی تر باشه مثلا x+1

$x^۲-۲x+۱=\frac{۱}{۲}x+۱ \Rightarrow x^۲-\frac{۵}{۲}x=۰ \Rightarrow x(x-\frac{۵}{۲})=۰$

$x=۰\ ,\ x=\frac{۵}{۲}$



۱ معادله $(x-۱)^۲=\frac{۱}{۲}x+۱$ را حل کنید.

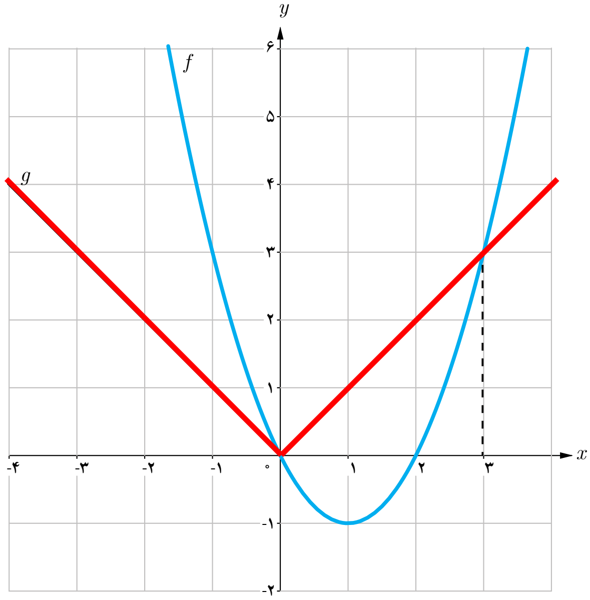
۲ نمودار دو تابع $y=(x-۱)^۲$ و $y=\frac{۱}{۲}x+۱$ را رسم کنید.
و طول نقاط تلاقی نمودارها را بیابید.

$x=۰\ ,\ x=\frac{۵}{۲}$

۳ چه ارتباطی بین ریشه‌های معادله و طول‌های نقاط تلاقی نمودارها وجود دارد؟

ریشه‌های معادله؛ همان طول نقاط تلاقی نمودارها هستند.

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط محل تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادله $f(x)=g(x)$ است و برعکس هر جواب این معادله طول یکی از نقاط محل تلاقی این دو نمودار است.
این روش حل معادله که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است را **روش هندسی (نموداری) حل معادلات** می‌نامند.



✤ **مثال :** به روش هندسی معادله $|x|=x^۲-۲x$ را حل کنید.

✤ **حل :** با فرض $f(x)=x^۲-۲x$ و $g(x)=|x|$، نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم :

با توجه به رسم نمودارهای دو تابع طول‌های نقاط تلاقی دو نمودار عبارت‌اند از $x=۰$ و $x=۳$ که جواب‌های معادله $|x|=x^۲-۲x$ می‌باشند.

$$S=\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}=۱ \quad , \quad P=\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۹} \qquad x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-x+\frac{۲}{۹}=۰$$

تمرین

$$S=a+۲a=۳a \quad , \quad P=a\times ۲a=۲a^۲$$

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۳ax+۲a^۲=۰$$

۱ معادله درجه دومی بنویسید که :

الف) ریشه‌های آن $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ باشند.

مسئله بی شمار جواب دارد

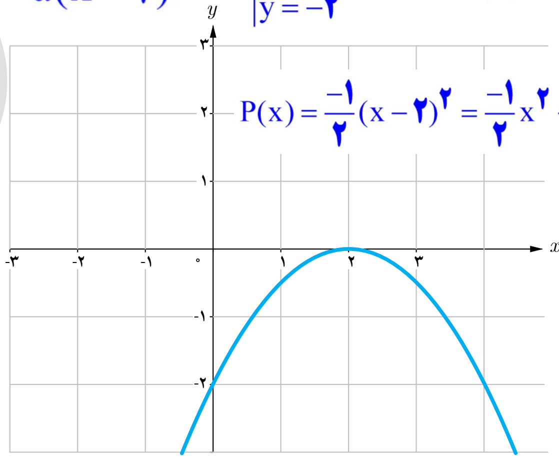
ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x)=ax^۲+bx+c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه آن را مشخص کنید.

$$P(x)=۰ \Rightarrow x=۲$$

$$y=a(x-۲)^۲ \qquad \begin{vmatrix} x=۰ \\ y=-۲ \end{vmatrix} : -۲=a(۴) \Rightarrow a=\frac{-۱}{۲}$$

$$P(x)=\frac{-۱}{۲}(x-۲)^۲=\frac{-۱}{۲}x^۲+۲x-۲$$



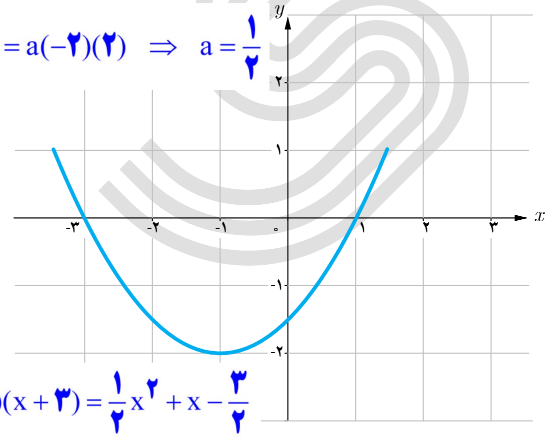
(الف)

$$P(x)=۰ \Rightarrow x=۱ \quad , \quad x=-۳$$

$$y=a(x-۱)(x+۳)$$

$$\begin{vmatrix} x=-۱ \\ y=-۲ \end{vmatrix} : -۲=a(-۲)(۲) \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$P(x)=\frac{۱}{۲}(x-۱)(x+۳)=\frac{۱}{۲}x^۲+x-\frac{۳}{۲}$$



(ب)

$$t_{max} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۴۴}{-۳۲} = \frac{۹}{۲} \qquad h_{max} = h(\frac{۹}{۲}) = -۱۶ \times \frac{۸۱}{۴} + ۱۴۴ \times \frac{۹}{۲} = -۳۲۴ + ۶۴۸ = ۳۲۴$$

$$h(t) = ۰ \Rightarrow t(-۱۶t + ۱۴۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \\ t = \frac{۱۴۴}{۱۶} = ۹ \end{cases}$$

۴ یک موشک با سرعت اولیه ۱۴۴ متر بر ثانیه از زمین پرتاب می‌شود. ارتفاع آن (h) در زمان t، از رابطه $h(t)=-۱۶t^۲+۱۴۴t$ به‌دست می‌آید. ارتفاع ماکزیمم آن و زمانی که موشک به زمین برخورد می‌کند را به‌دست آورید.

(نمودار صفحه بعد)

۵ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^۳-۴x = ۰ \Rightarrow x(x^۲-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm ۲ \end{cases}$

ب) $g(x)=۲x^۳+x^۲+۳x = ۰ \Rightarrow x(۲x^۲+x+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ ۲x^۲+x+۳=۰ \ : \ \Delta = b^۲-۴ac = ۱-۲۴ = -۲۳ \end{cases}$

ریشه حقیقی ندارد

پ) $h(x)=x^۳+۳x^۲+۵$???

۶ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^۴-۳x^۲+۲=۰$

ب) $(\frac{x^۲}{۳}-۲)^۲-۷(\frac{x^۲}{۳}-۲)+۶=۰$

پ) $(۴-x^۲)^۲-(۴-x^۲)=۱۵$

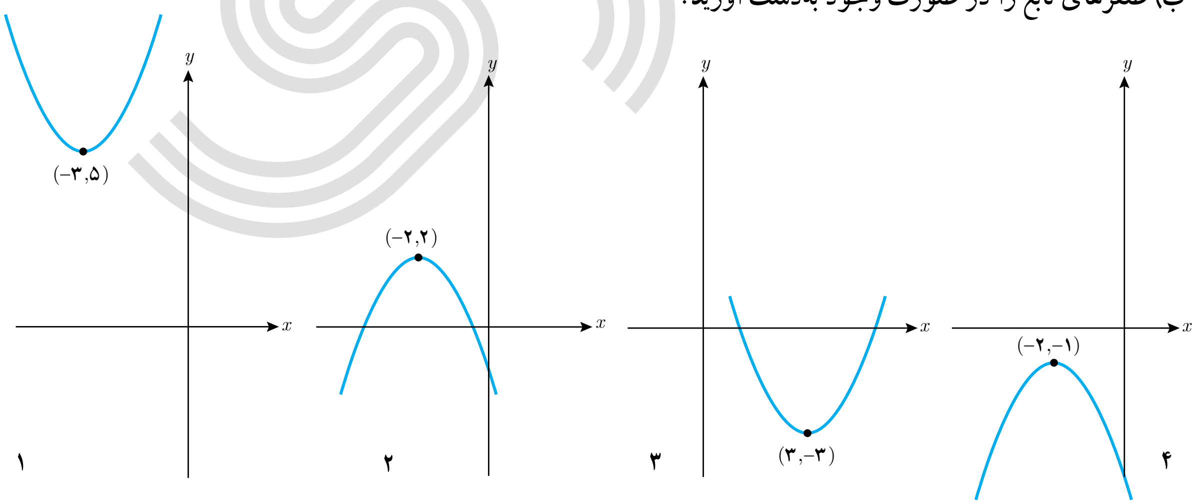
جواب تمرین های ۶ تا ۸ صفحه بعد

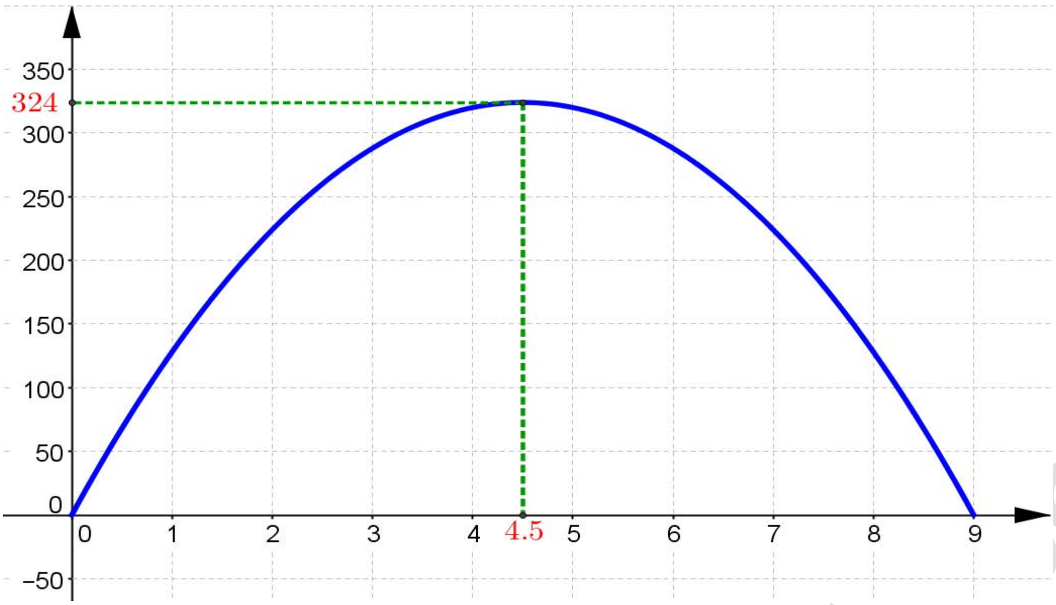
۷ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-۱| = x^۲-x-۱$ را با استفاده از روش هندسی به‌دست آورید.

۸ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ است که در آن $|a|=۱$ و نقطهٔ رأس سهمی داده شده است.

الف) ضابطه تابع را مشخص کنید.

ب) صفرهای تابع را در صورت وجود به‌دست آورید.





(نمودار تمرین ۴)

جواب تمرین ۶ صفحه ۱۶ :

الف) $x^{۲}=t \Rightarrow t^{۲}-۳t+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \Rightarrow x^{۲}=۱ \Rightarrow x=\pm ۱ \\ t=۲ \Rightarrow x^{۲}=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲} \end{cases}$

ب) $\frac{x^{۲}}{۳}-۲=t \Rightarrow t^{۲}-۷t+۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \Rightarrow \frac{x^{۲}}{۳}-۲=۱ \Rightarrow x^{۲}=۹ \Rightarrow x=\pm ۱ \\ t=۶ \Rightarrow \frac{x^{۲}}{۳}-۲=۶ \Rightarrow x^{۲}=۲۴ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲۴} \end{cases}$

پ) $۴-x^{۲}=t \Rightarrow t^{۲}-t-۱۵=۰ \ : \ \Delta=b^{۲}-۴ac=۱+۶۰=۶۱ \Rightarrow t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱\pm\sqrt{۶۱}}{۲}$

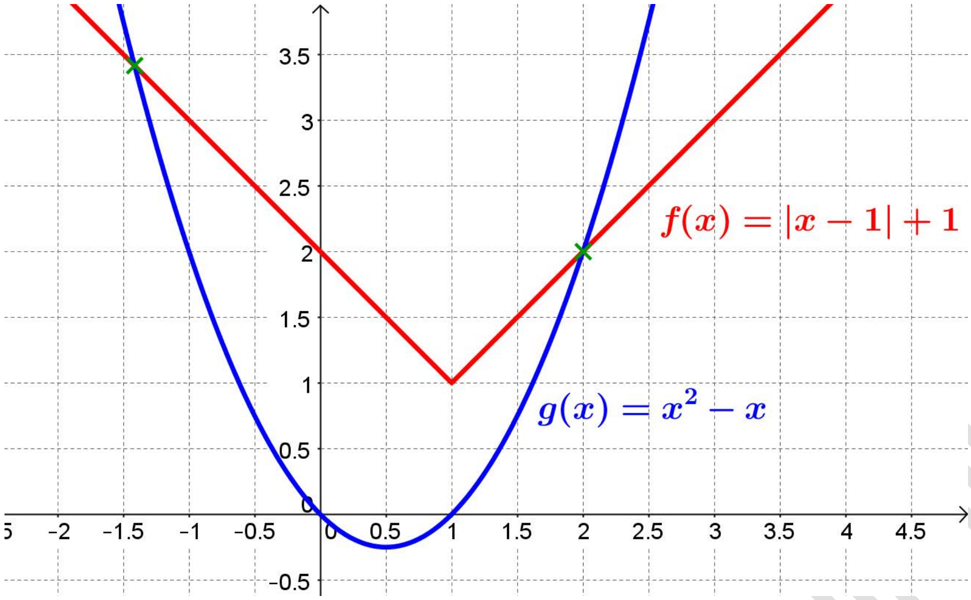
$$t=\frac{۱+\sqrt{۶۱}}{۲} \Rightarrow ۴-x^{۲}=\frac{۱+\sqrt{۶۱}}{۲} \Rightarrow x^{۲}=۴-\frac{۱+\sqrt{۶۱}}{۲}=\frac{۷-\sqrt{۶۱}}{۲}$$

$$t=\frac{۱-\sqrt{۶۱}}{۲} \Rightarrow ۴-x^{۲}=\frac{۱-\sqrt{۶۱}}{۲} \Rightarrow x^{۲}=۴-\frac{۱-\sqrt{۶۱}}{۲}=\frac{۷+\sqrt{۶۱}}{۲}=\frac{۱۴+۲\sqrt{۶۱}}{۴}$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۱۴+۲\sqrt{۶۱}}}{۲}$$

جواب تمرین ۷ صفحه ۱۶ :

$$|x-1| = x^2 - x - 1 \Rightarrow |x-1|+1 = x^2 - x \quad : \begin{cases} f(x) = |x-1|+1 \\ g(x) = x^2 - x \end{cases}$$



معادله دارای ۲ ریشه است

یکی از ریشه ها ۲ و ریشه ی دیگر تقریبا ۱/۴- می باشد.

جواب سوال ۸ صفحه ۱۶ :

۱) چون شاخه های سهمی به سمت بالاست لذا **a** مثبت است؛ درنتیجه $a=1$ و داریم: $y = x^2 + bx + c$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{2} = -3 \Rightarrow b = 6 \qquad \begin{vmatrix} x=-3 \\ y=5 \end{vmatrix} : 5 = 9 - 3b + c \Rightarrow c = 14$$

$$\Rightarrow y = x^2 + 6x + 14$$

چون نمودار سهمی محور **x**ها را قطع نمی کند؛ پس معادله ریشه حقیقی ندارد.

جواب به روشی دیگر: هرگاه رأس سهمی نقطه ی (x_1, y_1) باشد؛ معادله ی سهمی به صورت زیر است:

$$\boxed{y = a(x - x_1)^2 + y_1}$$

در این سوال $a=1$ است و رأس سهمی نقطه ی $(-3,5)$ لذا معادله ی سهمی به صورت زیر می باشد:

$$y = (x+3)^2 + 5$$

چون نمودار سهمی محور **x**ها را قطع نمی کند؛ پس معادله ریشه حقیقی ندارد.

جواب سوال ۸ صفحه ۱۶ :

۲)

رأس سهمی $\left|\begin{matrix}-۲\\ ۲\end{matrix}\right.$, $a=-۱ \Rightarrow y=-۱(x+۲)^۲+۲$

$$-(x+۲)^۲+۲=۰ \Rightarrow (x+۲)^۲=۲ \Rightarrow \begin{cases} x+۲=\sqrt{۲} \Rightarrow x=-۲+\sqrt{۲} \\ x+۲=-\sqrt{۲} \Rightarrow x=-۲-\sqrt{۲} \end{cases}$$

۳)

رأس سهمی $\left|\begin{matrix}۳\\ -۳\end{matrix}\right.$, $a=۱ \Rightarrow y=(x-۳)^۲-۳$

$$(x-۳)^۲-۳=۰ \Rightarrow (x-۳)^۲=۳ \Rightarrow \begin{cases} x-۳=\sqrt{۳} \Rightarrow x=۳+\sqrt{۳} \\ x-۳=-\sqrt{۳} \Rightarrow x=۳-\sqrt{۳} \end{cases}$$

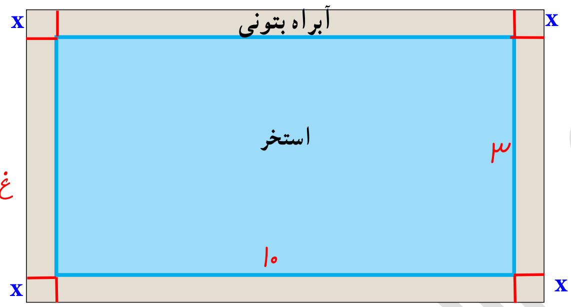
۴)

رأس سهمی $\left|\begin{matrix}-۲\\ -۱\end{matrix}\right.$, $a=-۱ \Rightarrow y=-(x+۲)^۲-۱$

چون نمودار سهمی محور **x**ها را قطع نمی کند؛ پس معادله ریشه حقیقی ندارد.

۹ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد ۳ و ۱۰ متر دارای یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه بتونی در همه جا دارای پهنای یکسان و دارای مساحت ۱۴ مترمربع باشد، پهنای آبراه بتونی را تعیین کنید.

$$4x^2+20x+6x=14$$



$$2x^2+13x-7=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} & \text{ق . ق} \\ x=-7 & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(2x+14)(2x-1)=0$$

۱۰ طول یک کفپوش سرامیکی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است، برای فرش کردن زمینی به مساحت ۲۱ مترمربع تعداد دو هزار کفپوش مصرف شده است، طول هر کفپوش چند سانتی‌متر بوده است؟

مساحت یک کفپوش: $x(4x+1)=4x^2+x$

$$2000(4x^2+x)=210000 \Rightarrow 4x^2+x=105 \Rightarrow 4x^2+x-105=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(4x+21)(4x-20)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-21}{4} & \text{غ . ق . ق} \\ x=5 & \text{ق . ق} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ طول هر کفپوش =۲۱

درس ۳

معادلات گویا و گنگ

معادلات شامل عبارات گویا

حل یک مسئله

در یک مغازه ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب‌نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب‌نمک ۴ درصدی ساخته است. چگونه می‌توان این محلول را به غلظت مورد نظر رساند؟

برای حل مسئله حالت‌های مختلفی وجود دارد. ممکن است نمک به اندازه کافی وجود داشته باشد و یا نمک در مغازه موجود نباشد و یا نمک به میزان کافی وجود نداشته باشد. در هر حالت می‌توان مسئله را مورد بررسی قرار داد.

حالت اول

فرض کنیم نمک به اندازه کافی موجود باشد.

ابتدا تعیین می‌کنیم در محلول چند کیلوگرم نمک وجود دارد: $۲۰۰\times\frac{۴}{۱۰۰}=۸$ کیلوگرم

حالا اگر بخواهیم x کیلوگرم نمک به محلول بیفزاییم وزن نمک x+۸ و وزن کل محلول x+۲۰۰ و نسبت میزان نمک موجود به کل محلول برابر $\frac{۸+x}{۲۰۰+x}$ خواهد بود. از آنجا که این نسبت باید به محلول ۷ درصد نمک تبدیل شود تناسب زیر برقرار خواهد بود:

$$\frac{x+۸}{۲۰۰+x}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

برای حل معادله اخیر که شامل عبارت گویا است، طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها یعنی $(۲۰۰+x)۱۰۰$ ضرب می‌کنیم. $۱۰۰(x+۸)=۷(۲۰۰+x)$

از حل معادله درجه اول اخیر خواهیم دانست: $۹۳x=۶۰۰\Rightarrow x=\frac{۶۰۰}{۹۳}$

این میزان نمک تقریباً ۶ کیلو و ۴۵۱ گرم خواهد بود. که باید به محلول اضافه شود تا از محلول ۷ درصد نمک به‌دست آید.

حالت دوم

اگر نمک در مغازه موجود نباشد.

در این حالت باید y کیلوگرم از آب محلول را تبخیر کنیم. واضح است که میزان نمک محلول کم نخواهد شد. در این حالت معادله مورد نظر به‌صورت زیر خواهد بود. (چرا؟)

$$\frac{۸}{۲۰۰-y}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

از حل معادله اخیر خواهیم داشت $۷(۲۰۰-y)=۸۰۰$ و از آنجا $y=\frac{۶۰۰}{۷}$ و این بدین معنی است که باید با تبخیر ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم از آب محلول به غلظت مورد نظر برسیم.

کار در کلاس

در مسئله صفحهٔ قبل حالت سومی وجود دارد که نمک به اندازه کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و آن را به محلول بیفزاییم. چند کیلوگرم از آب محلول باید تبخیر شود تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسیم؟

وزن نمک : $۸+۵=۱۳$

وزن کل محلول : $۲۰۰+۵=۲۰۵$

$$\frac{۱۳}{۲۰۵-y}=\frac{۷}{۱۰۰} \Rightarrow ۱۴۳۵-۷y=۱۳۰۰ \Rightarrow y=\frac{۱۳۵}{۷}\simeq ۱۹/۲۹$$

برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به‌دست آمده معادله را حل می‌کنیم. جواب به‌دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند (چرا؟)

همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی، مطابقت نداشته باشند که این جواب‌ها نیز مورد قبول نیستند.

مثال : معادله $\frac{۴x-۴}{x^۲-۴}=\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x+۲}$ را حل کنید.

حل : کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها برابر $x(x^۲-۴)$ می‌باشد. (چرا؟)

با ضرب این عبارت در طرفین معادله داریم.

$$۳x(x-۲)+۲(x^۲-۴)=x(۴x-۴)$$

$$۳x^۲-۶x+۲x^۲-۸=۴x^۲-۴x$$

$$x^۲-۲x-۸=۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۴ \text{ یا } x=-۲$$

اما جواب $x=-۲$ مورد قبول نمی‌باشد. (چرا؟) و تنها جواب مورد قبول معادله $x=۴$ است.

کار در کلاس

۱ معادله $\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}=3$ را حل کنید.

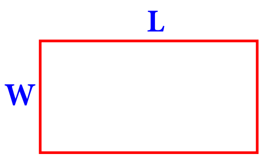
$$\xrightarrow{\times(x-2)^2} 1+2(x-2)=3(x-2)^2 \Rightarrow 1+2x-4=3x^2-12x+12 \Rightarrow 3x^2-14x+15=0$$

$$\frac{1}{3}(3x-9)(3x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x=9 \Rightarrow x=3 & \text{ق . ق} \\ 3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3} & \text{ق . ق} \end{cases}$$

۲ اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم : $\frac{w+L}{L}=\frac{L}{w}$ آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل‌شکل، برابر ۳۲۰ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

ابتدا با یک مسئله ساده تر جواب را به دست می آوریم؛ مثلا فرض می کنیم محیط زمین ۲ متر باشد؛ سپس جواب های حاصل را در ۱۶۰ ضرب می کنیم تا جواب مسئله ی اصلی به دست آید:



$$2L+2W=2 \Rightarrow L+W=1 \Rightarrow L=1-W \;:\; \frac{L}{W}=\frac{W+L}{L} \Rightarrow \frac{1-W}{W}=\frac{1}{1-W}$$

$$\Rightarrow 1-2W+W^2=W \Rightarrow W^2-3W+1=0 \Rightarrow W=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases} W=\frac{3+\sqrt{5}}{2} & \text{غ . ق . ق} \\ W=\frac{3-\sqrt{5}}{2} & \text{ق . ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L=1-W=1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{جواب مسئله اصلی:} \begin{cases} \text{عرض}=160\times\frac{3-\sqrt{5}}{2}=240-80\sqrt{5} \\ \text{طول}=160\times\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=-80+80\sqrt{5} \end{cases}$$

نسبت طلایی

در ریاضیات و هنر هنگامی نسبت طلایی رخ می‌دهد که نسبت بخش بزرگ‌تر به بخش کوچک‌تر برابر نسبت کل به بخش بزرگ‌تر باشد.
تعبیر هندسی آن چنین است. طول مستطیلی به مساحت واحد که عرض آن یک واحد کمتر از طولش باشد.
مصریان سال‌ها قبل از میلاد از این نسبت آگاه بوده‌اند و آن را در ساخت اهرم مصر رعایت کرده‌اند. بسیاری از الگوهای طبیعی در بدن انسان این نسبت را دارا هستند.
روانشناسان هم بر این باورند زیباترین مستطیل به دید انسان مستطیلی است که نسبت طول به عرض آن برابر عدد طلایی باشد. دلیل این امر آن است که این نسبت در شبکه چشم انسان رعایت شده و هر مستطیلی که این نسبت را دارا باشد به چشم انسان زیبا می‌آید.

[منبع مبانی هنرهای تجسمی قسمت اول ــ شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران ۱۳۸۲]

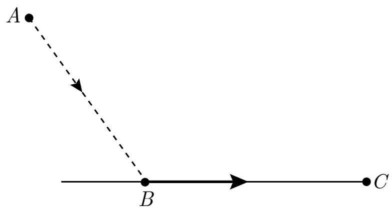
نسبت طلایی در ایران

برج و میدان آزادی طول بنا ۶۲ وعرض آن ۴۲ است که نسبت آن به عدد طلایی نزدیک است.
بیستون از دوره هخامنشی در کرمانشاه به طول ۵ و عرض ۳ کیلومتر به عدد طلایی نزدیک است.
یکی از هنرهای معماری در تخت جمشید این است که ارتفاع سردرها به عرض آنها و همین‌طور نسبت ارتفاع ستون‌ها به فاصله بین دو ستون نسبت طلایی است.
در پل ورسک، ارگ بم، مقبره ابن‌سینا، میدان نقش جهان و مسجد شیخ لطف‌اله خوشنویسی میرعماد حسنی از نسبت طلایی استفاده شده است. با جست‌وجوی اینترنتی به مطالب خواندنی در این زمینه دست می‌یابید.

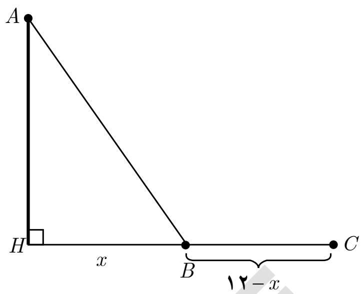
معادلات شامل عبارت‌های گنگ

طرح یک مسئله

معمولاً مرغ‌های دریایی برای شکار ماهی‌ها، بخشی از مسیر را در هوا و بخشی را در سطح آب طی می‌کنند. یک مرغ دریایی در نقطه A به ارتفاع ۶ متر از سطح آب قرار دارد. فاصله تصویر مرغ روی آب از ماهی که در نقطه C قرار دارد ۱۲ متر است. مرغ ابتدا از نقطه A به نقطه B می‌رود سپس در سطح آب از B به C می‌رود تا ماهی را شکار کند. اگر مرغ دریایی برای طی هر متر در هوا ۱۴ کیلوکالری و برای طی هر متر در سطح آب ۱۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند.



نقطه B در چه فاصله‌ای از C باشد تا مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند؟



✤ **حل :** برای درک بهتر مسئله شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم. فاصله B از تصویر A را در آب x می‌گیریم در نتیجه فاصله B و C برابر $۱۲-x$ می‌شود. با استفاده از رابطه فیثاغورس طول AB برابر $\sqrt{۳۶+x^۲}$ می‌شود.

میزان انرژی مصرف‌شده توسط مرغ دریایی برابر است با : $۱۴\sqrt{۳۶+x^۲}+۱۰(۱۲-x)$

برای آنکه مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند باید داشته باشیم :

$$۱۴\sqrt{۳۶+x^۲}+۱۲۰-۱۰x=۱۸۰ \Rightarrow ۱۴\sqrt{۳۶+x^۲}=۱۰x+۶۰$$
$$\Rightarrow ۷\sqrt{۳۶+x^۲}=۵x+۳۰$$

با به توان دو رساندن طرفین معادله اخیر و ساده کردن به معادله درجه دوم $۲x^۲-۲۵x+۷۲=۰$ می‌رسیم که از آنجا $x=۸$ یا $x=۴/۵$. در این‌صورت فاصله B تا C برابر $۱۲-۸=۴$ یا $۱۲-۴/۵=۷/۵$ خواهد بود.

اگر مرغ دریایی مستقیماً از A به C پرواز می‌کرد چقدر کالری مصرف می‌کرد؟

آیا اقدام مرغ دریایی برای شکار ماهی‌ها هوشمندانه نمی‌باشد؟!

$AC=\sqrt{۳۶+۱۴۴}=\sqrt{۱۸۰}=۶\sqrt{۵}$

مقدار کالری $=۶\sqrt{۵}\times ۱۴\simeq ۱۸۷/۸۳$

$x_{min}=۶/۱۱۵۷$, $۱۷۸/۷۸$

برخی از معادلات دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند که آنها را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آنها با به توان‌رسانی طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده باید در معادله اصلی این عمل آزمایش شوند، زیرا عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.

مثال : معادله $\sqrt{x+۲}=x-۴$ را حل کنید.

حل :

$$(\sqrt{x+۲})^۲=(x-۴)^۲$$
$$x+۲=x^۲-۸x+۱۶$$
$$x^۲-۹x+۱۴=۰$$
$$(x-۲)(x-۷)=۰ \Rightarrow x=۲ \text{ یا } x=۷$$

آزمایش جواب‌ها

$$x=۷:\sqrt{۷+۲}\overset{?}{=}۷-۴$$
$$۳=۳$$

✓ جواب معادله است

$$x=۲:\sqrt{۲+۲}\overset{?}{=}۲-۴$$
$$۲\neq-۲$$

× جواب مسئله نمی‌باشد

تذکر : در حل این مسئله طرفین معادله اولیه نامنفی بودند و به توان دو رساندن آن مشکلی ایجاد نمی‌کرد. در حل معادلات گنگ می‌توان با تعیین دامنه تعریف معادله، جواب‌های نهایی را با استفاده از آن مورد بررسی قرار داد. در حل این مسئله برای به‌دست آوردن دامنه تعریف داریم :

$$\begin{cases} x+۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۲ \\ x-۴\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۴ \end{cases} \xRightarrow{\text{اشتراک نواحی}} x\geq ۴$$

کار در کلاس

۱ آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر شش باشد؟

$$x+\sqrt{x}=۶ \Rightarrow \boxed{\sqrt{x}=۶-x} \Rightarrow (\sqrt{x})^۲=(۶-x)^۲$$

$$x=۳۶-۱۲x+x^۲ \Rightarrow x^۲-۱۳x+۳۶=۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ & \text{ق ـ ق} \\ x=۹ & \text{غ ـ ق ـ ق} \end{cases}$$

۲ معادله $\sqrt{x^۲-۴}+۲\sqrt{x}=۰$ را حل کنید. سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

روش اول: *می دانیم مجموع دو عبارت نامنفی هنگامی صفر می شود؛ که هر دو عبارت باهم صفر باشند؛ لذا:*

$$\sqrt{x^۲-۴}+۲\sqrt{x}=۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲-۴=۰ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow \boxed{x=\pm ۲} \\ \boxed{x=۰} \end{cases} \xrightarrow{\text{جواب مشترک}}$$

وجود ندارد؛ در نتیجه معادله جواب ندارد

روش دوم: *اگر منظور کتاب از حل معادله، انجام محاسبات ریاضی است؛ به صورت زیر می توانیم عمل کنیم:*

$$\sqrt{x^۲-۴}+۲\sqrt{x}=۰ \Rightarrow \boxed{\sqrt{x^۲-۴}=-۲\sqrt{x}} \Rightarrow \left(\sqrt{x^۲-۴}\right)^۲=\left(-۲\sqrt{x}\right)^۲ \Rightarrow x^۲-۴=۴x$$

$$\Rightarrow x^۲-۴x-۴=۰ \;:\; \Delta=۱۶+۱۶=۳۲=۲\times۱۶ \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۴\pm۴\sqrt{۲}}{۲}=\begin{cases} x=۲+۲\sqrt{۲} & \text{غ . ق . ق} \\ x=۲-۲\sqrt{۲} & \text{غ . ق . ق} \end{cases}$$

تمرین

هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{۶}{x}=۲+\frac{x}{x+۱}$

$$\xrightarrow{\times x(x+۱)} ۶(x+۱)=۲x(x+۱)+x(x) \Rightarrow ۶x+۶=۲x^۲+۲x+x^۲ \Rightarrow ۳x^۲-۴x-۶=۰$$

$$\Delta=۱۶+۷۲=۸۸=۴\times۲۲ \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۴\pm۲\sqrt{۲۲}}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۲+\sqrt{۲۲}}{۳} & \text{ق · ق} \\ x=\frac{۲-\sqrt{۲۲}}{۳} & \text{ق · ق} \end{cases}$$

۲) $\frac{P}{۲-P}+\frac{۲}{P}=۵$

$$\xrightarrow{\times P(۲-P)} P(P)+۲(۲-P)=۵P(۲-P) \Rightarrow P^۲+۴-۲P=۱۰P-۵P^۲ \Rightarrow ۶P^۲-۱۲P+۴=۰ \Rightarrow ۳P^۲-۶P+۲=۰$$

$$\Delta=۳۶-۲۴=۱۲=۴\times۳ \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۶\pm۲\sqrt{۳}}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳} & \text{ق · ق} \\ x=\frac{۳-\sqrt{۳}}{۳} & \text{ق · ق} \end{cases}$$

۳) $\frac{۳y+۵}{y^۲+۵y}+\frac{y+۴}{y+۵}=\frac{y+۱}{y}$

$$\xrightarrow{\times y(y+۵)} ۳y+۵+y(y+۴)=(y+۱)(y+۵) \Rightarrow ۳y+\underline{۵}+\underline{y^۲}+۴y=\underline{y^۲}+۶y+\underline{۵} \Rightarrow y=۰ \quad \text{غ · ق}$$

۴) $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x+۴} \Rightarrow (۲\sqrt{x})^۲=(\sqrt{۳x+۴})^۲ \Rightarrow ۴x=۳x+۴ \Rightarrow x=۴ \quad$ ق · ق

۵) $\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=\frac{\underline{۱-x}}{۱} \Rightarrow (۱+\sqrt{x})\underline{(۱-x)}=(۱-\sqrt{x}) \Rightarrow (۱+\sqrt{x})\underline{(۱+\sqrt{x})(۱-\sqrt{x})}-(۱-\sqrt{x})=۰ \Rightarrow (۱-\sqrt{x})\left[(۱+\sqrt{x})^۲-۱\right]=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱-\sqrt{x}=۰ \Rightarrow \sqrt{x}=۱ \Rightarrow x=۱ \quad \text{ق · ق} \\ (۱+\sqrt{x})^۲-۱=۰ \Rightarrow (۱+\sqrt{x})^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases} ۱+\sqrt{x}=۱ \Rightarrow \sqrt{x}=۰ \Rightarrow x=۰ \quad \text{ق · ق} \\ ۱+\sqrt{x}=-۱ \Rightarrow \sqrt{x}=-۲ \quad \text{جواب ندارد} \end{cases} \end{cases}$$

۶) $\frac{۱}{\sqrt{x}+۲}=۲+\frac{۱}{\sqrt{x}-۲}$

$$\xrightarrow[=x-۴]{\times(\sqrt{x}+۲)(\sqrt{x}-۲)} \underline{\sqrt{x}}-۲=۲(x-۴)+\underline{\sqrt{x}}+۲ \Rightarrow -۲=۲x-۸+۲ \Rightarrow ۲x=۴ \Rightarrow x=۲ \quad \text{ق · ق}$$

۷) $\sqrt{x+3}+3\sqrt{3x+1}=8 \Rightarrow \boxed{3\sqrt{3x+1}=8-\sqrt{x+3}} \Rightarrow \left(3\sqrt{3x+1}\right)^2=\left(8-\sqrt{x+3}\right)^2$

$\Rightarrow 9(3x+1)=64-16\sqrt{x+3}+x+3 \Rightarrow 16\sqrt{x+3}=58-26x \Rightarrow \boxed{8\sqrt{x+3}=29-13x}$

$\Rightarrow \left(8\sqrt{x+3}\right)^2=(29-13x)^2 \Rightarrow 64(x+3)=841-754x+169x^2 \Rightarrow 169x^2-818x+649=0$

$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = 0} \begin{cases} x=1 & \text{ق ق} \\ x=\frac{c}{a}=\frac{649}{169}\simeq 3/84 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

---

۸ پدربزرگ چند اسباب‌بازی یکسان برای اهدا به مهدکودک، مجموعاً به قیمت ۱۲۰هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب‌بازی هزار تومان به او تخفیف می‌داد او با همان پول چهار اسباب‌بازی بیشتر می‌توانست بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

$x =$ قیمت هر اسباب بازی به هزار تومان قبل از تخفیف

$y =$ تعداد اسباب بازی

$xy=120 \quad , \quad (x-1)(y+4)=120 \Rightarrow \cancel{\underbrace{xy}_{120}}+4x-y-4=\cancel{120} \Rightarrow y=4x-4$

$\begin{cases} xy=120 \\ y=4x-4 \end{cases} \Rightarrow x(4x-4)=120 \Rightarrow 4x^2-4x-120=0 \Rightarrow x^2-x-30=0$

$\Rightarrow (x-6)(x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 & \text{ق ق} \\ x=-5 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف} = 6000}$

---

۹ فاصله بین دو شهر واقع در کنار رودخانه‌ای ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. درصورتی‌که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

می دانیم اگر متحرکی با سرعت V در مدت زمان t؛ مسافت x را طی کند داریم: $x=V.t \Rightarrow t=\frac{x}{V}$

فرض کنیم : t_1 : مدت زمان رفت، V_1 : سرعت رفت، t_2 : مدت زمان برگشت، V_2 : سرعت برگشت

در این صورت داریم:

$V_2=V_1-8 \qquad t_1+t_2=17-2=15 \qquad t_1=\frac{144}{V_1} \qquad t_2=\frac{144}{V_2}$

$t_1+t_2=15 \Rightarrow \frac{144}{V_1}+\frac{144}{V_1-8}=15 \xrightarrow{\div 3} \frac{48}{V_1}+\frac{48}{V_1-8}=5 \xrightarrow{\times V_1(V_1-8)} 48(V_1-8)+48V_1=5V_1(V_1-8)$

$\Rightarrow 48V_1-48\times 8+48V_1=5V_1^2-40V_1 \Rightarrow 5V_1^2-136V_1+48\times 8=0 \Rightarrow \frac{1}{5}(5V_1-120)(5V_1-16)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 5V_1=120 \Rightarrow \boxed{V_1=24 \ \text{ق ق}} \\ 5V_1=16 \Rightarrow V_1=3/2 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$

۱۰ ماشین A کاری را به‌تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهد؟

فرض می کنیم: $V =$ حجم کار

$x =$ مدت زمان انجام کار توسط ماشین B

در اینصورت مدت زمان انجام کار توسط ماشین A می شود: $\boxed{x-۱۵}$ و خواهیم داشت:

$\frac{V}{x-۱۵} =$ میزان کار ماشین A در یک ساعت

$\frac{V}{x} =$ میزان کار ماشین B در یک ساعت

$\frac{V}{۱۸} =$ میزان کار هر دو ماشین A و B با هم در یک ساعت

$$\Rightarrow \frac{V}{x}+\frac{V}{x-۱۵}=\frac{V}{۱۸} \Rightarrow \frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۱۵}=\frac{۱}{۱۸} \Rightarrow \frac{\overbrace{x-۱۵+x}^{۲x-۱۵}}{x(x-۱۵)}=\frac{۱}{۱۸} \Rightarrow x^۲-۱۵x=۳۶x-۲۷۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۵۱x+۲۷۰=۰ \Rightarrow (x-۴۵)(x-۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴۵ & \text{ق . ق} \\ x=۶ & \text{غ . ق . ق} \end{cases}$$

بنابراین ماشین B در ۴۵ ساعت و ماشین A در ۳۰ ساعت آن کار را به تنهایی انجام می دهند.

درس ۴

قدر مطلق و ویژگی‌های آن

در سال قبل با مفهوم قدر مطلق و برخی خواص آن آشنا شدید. همان‌طور که می‌دانید قدرمطلق عدد حقیقی a به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|a|=\begin{cases} a & , \quad a\geq 0 \\ -a & , \quad a<0 \end{cases}$$

کاردرکلاس

۱ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدون علامت قدرمطلق بنویسید.

بهتر است سوال های زیر هم اضافه شود:

الف) $|-5-(-3)|=|-2|=-(-2)=2$

ب) $|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=-(\sqrt{3}-\sqrt{5})=-\sqrt{3}+\sqrt{5}$

ت) $|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$

پ) $\left|1/5-1\frac{1}{2}\right|=|1/5-1/5|=|0|=0$

ث) $|\pi-3|=\pi-3$

۲ عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\sqrt{a^4+2a^2+1}=\sqrt{(a^2+1)^2}=|a^2+1|=a^2+1$

ب) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=|\sqrt{3}-2|=-(\sqrt{3}-2)=-\sqrt{3}+2$

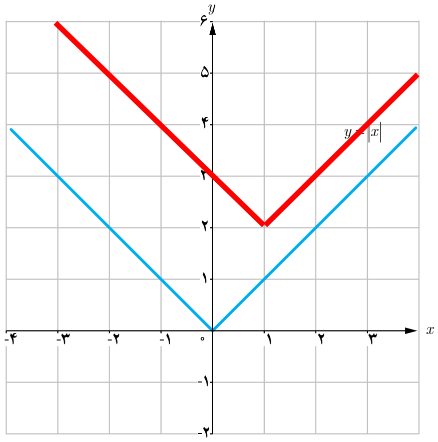
رسم توابع قدر مطلق

فعالیت

می‌خواهیم نمودار تابع $y=|x-1|+2$ را رسم کنیم.

روش اول

با توجه به نمودار $y=|x|$ در شکل مقابل و استفاده از انتقال منحنی، نمودار آن را رسم کنید.

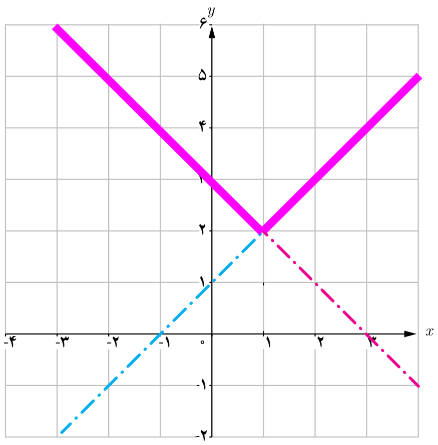


کافی است نمودار $y=|x|$

را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به بالا منتقل کنیم.

روش دوم

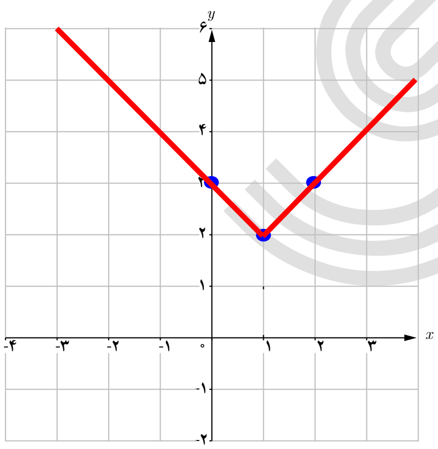
گام اول با استفاده از تعیین علامت، تابع را به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای بنویسید.



$$y=|x-1|+2=\begin{cases} x-1+2 & , x\ge 1\\ -x+1+2 & , x<1\end{cases}=\begin{cases} x+1 & x\ge 1\\ -x+3 & x<1\end{cases}$$

گام دوم با توجه به شکل روبه‌رو نمودار تابع را رسم کنید.

روش سوم (نقطه یابی)



با توجه به ریشه ی عبارت داخل قدر مطلق؛ و یک عدد

بعد و یک عدد قبلش؛ می توان نمودار این تابع را رسم نمود.

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	۰	۱	۲
y	۳	۲	۳

✤ **مثال :** نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=|x-1|+|x+2|$ را رسم کنید.

✤ **حل :** در اینجا نمی‌توانیم از رسم تابع $y=|x|$ و انتقال استفاده کنیم.
از روش تعیین علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها کمک می‌گیریم، برای این‌کار ابتدا عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

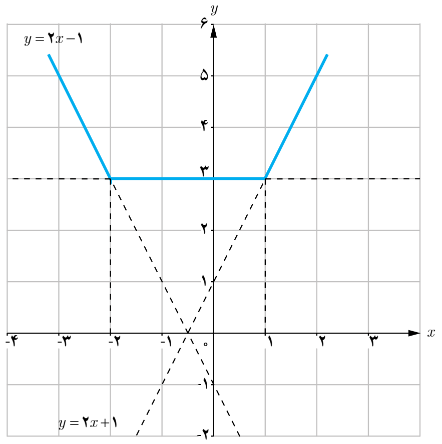
x		−۲		۱	
x−۱	−		−	○	+
x+۲	−	○	+		+

$f(x)=(x-1)+(x+2)=2x+1$

$f(x)=-(x-1)+(x+2)=3$

$f(x)=-(x-1)-(x+2)=-2x-1$

$$f(x)=\begin{cases}-2x-1 & , \quad x<-2\\ 3 & , \quad -2\le x\le 1\\ 2x+1 & , \quad x>1\end{cases}$$



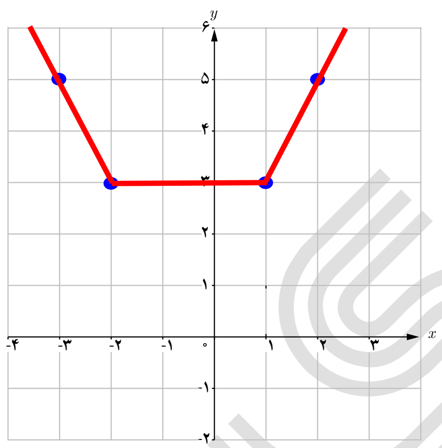
نمودار تابع از سه قسمت که هریک بخشی از یک خط هستند تشکیل می‌شود.

روش دیگر (نقطه یابی)

با توجه به ریشه های عبارت‌های داخل قدر مطلق ها؛ و یک عدد بعد و یک عدد قبل؛ می توان نمودار این تابع را رسم نمود.

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ $\qquad$ $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

x	−۳	−۲	۱	۲
y	۵	۳	۳	۵



ویژگی‌های قدر مطلق

در سال‌های قبل با برخی از ویژگی‌های قدر مطلق آشنا شدید که عبارت‌اند از :

الف) $|x|\geq 0$

ب) $\sqrt{x^2}=|x|$

پ) $|x|=a \Leftrightarrow x=a$ یا $x=-a$ $(a\geq 0)$

ت) $|x|=|a| \Leftrightarrow x=a$ یا $x=-a$

ث) $|-x|=|x|$

ج) $|x|^2=x^2$

فعالیت

فرض کنید a، b و ~~c~~ عددهای حقیقی دلخواه باشند.

۱ از رابطه $\sqrt{a^2}=|a|$ استفاده کنید و نشان دهید : $|ab|=|a|\,|b|$

$$|ab|=\sqrt{(ab)^2}=\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=|a||b|$$

۲ با فرض $b\neq 0$ و استفاده از مرحله قبل ثابت کنید . $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

با استفاده از فعالیت ۱ خواهیم داشت:

$$|a|=\left|\frac{a}{b}\times b\right|=\left|\frac{a}{b}\right|\times|b| \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$$

روش دیگر اثبات:

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}=\frac{|a|}{|b|}$$

فعالیت

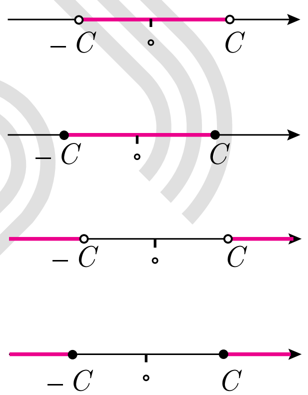
۱ فرض کنید c یک عدد حقیقی نامنفی باشد. هر نامعادله را به جواب متناظر آن وصل کنید.

الف) $|x|<C,\ (C\neq 0)$ (۱)

ب) $|x|>C$ (۲)

پ) $|x|\leq C$ (۳)

ت) $|x|\geq C$ (۴)



دو نتیجه ی مهم:

$$|u|\geq k \xleftrightarrow{k\geq 0} \begin{cases} u\geq k \\ \text{یا} \\ u\leq k \end{cases}$$

$$|u|\leq k \xleftrightarrow{k\geq 0} -k\leq u\leq k$$

۲ برای هر عدد حقیقی a نشان دهید : $-|a| \leq a \leq |a|$

۳ برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید $-|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b|$

۴ با استفاده از قسمت قبل «نامساوی مثلث» برای هر دو عدد حقیقی a و b نتیجه بگیرید : $|a+b| \leq |a|+|b|$

جواب فعالیت ۲: می دانیم هر عدد؛ کوچکتر یا مساوی خودش است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$|a| \leq |a| \xrightarrow{|a|=k} |a| \leq k \longrightarrow -k \leq a \leq k \xrightarrow{k=|a|} -|a| \leq a \leq |a|$$

جواب فعالیت ۳: با توجه به فعالیت ۲ خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} -|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b|$$

جواب فعالیت ۴: اگر فرض کنیم $|a|+|b|=k$ طبق نتیجه ی فعالیت ۳ خواهیم داشت:

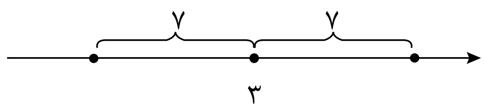
$$-k \leq a+b \leq k \longrightarrow |a+b| \leq k \xrightarrow{k=|a|+|b|} |a+b| \leq |a|+|b|$$

معادلات قدر مطلقی

حل یک مسئله

فاصله چه نقاطی روی محور اعداد حقیقی از نقطه ثابت ~~x~~ ۳ برابر ~~x~~ ۷ است؟

برای حل مسئله شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم.



اگر طول نقطه جواب مسئله را x بنامیم شرط مسئله به این معناست که $|x-3|=7$ با استفاده از ویژگی‌های قدرمطلق خواهیم دانست $x-3=\pm7$ و در نتیجه $x=10$ و $x=-4$ که هر دو جواب‌های معادله مورد قبول هستند.

> جواب‌های معادله $|f(x)|=|g(x)|$ همان جواب‌های دو معادله $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ هستند. به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارت قدر مطلق هستند **معادلات قدر مطلقی** می‌گویند.

✤ **مثال :** معادله $|x-4|=|3x-2|$ را حل کنید.

روش اول

(استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق)

✤ **حل :** جواب‌های این معادله همان جواب‌های دو معادله $3x-2=x-4$ و $3x-2=-(x-4)$ هستند که عبارت‌اند از :

$x=-1$ و $x=\frac{3}{2}$

روش دوم

با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت $9x^2-12x+4=x^2-8x+16$ و از آنجا $2x^2-x-3=0$. جواب‌های این معادله -1 و $\frac{3}{2}$ هستند.

کار در کلاس

معادله قدر مطلقی $|x-1|=4-3x$ را به سه روش زیر حل کنید.

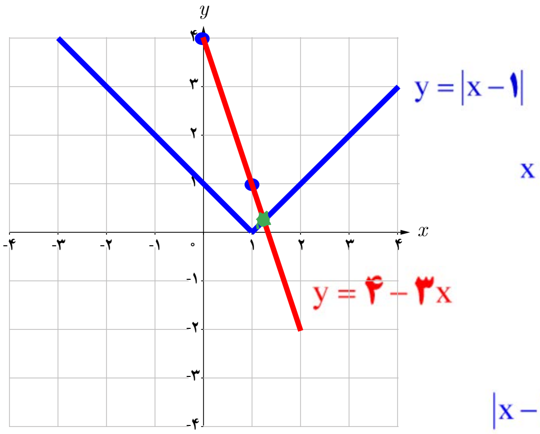
۱ **روش اول :** (با استفاده از تعریف قدر مطلق)

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & x\geq 1 \\ -x+1 & x<1 \end{cases}$$

حالت اول: $x\geq1 \Rightarrow x-1=4-3x \Rightarrow x=\frac{5}{4}$ ق . ق

حالت دوم: $x<1 \Rightarrow -x+1=4-3x \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ غ . ق . ق

مجموعه جواب= $\{\frac{5}{4}\}$



۲ **روش دوم :** (روش هندسی)

الف) توابع $y=|x-۱|$ و $y=۴-۳x$ را رسم کنید.

ب) طول‌های محل تلاقی دو نمودار را مشخص کنید. $x=\frac{۵}{۴}$

پ) جواب‌های معادله را به‌دست آورید. $x=\frac{۵}{۴}$

۳ **روش سوم :** طرفین معادله را به توان دو برسانید.

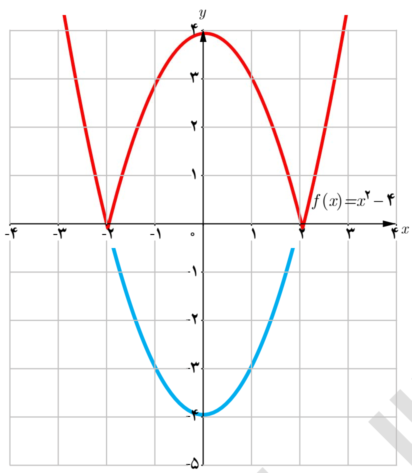
$$|x-۱|=\overbrace{۴-۳x}^{۴-۳x\geq ۰} \Rightarrow |x-۱|^۲=(۴-۳x)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۱۶-۲۴x+۹x^۲ \Rightarrow ۸x^۲-۲۲x+۱۵=۰$$

$$\frac{۱}{۸}(۸x-۱۲)(۸x-۱۰)=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۸x=۱۲ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲} & \text{غ . ق . ق} \\ ۸x=۱۰ \Rightarrow x=\frac{۵}{۴} & \text{ق . ق} \end{cases}$$

فعالیت

در شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^۲-۴$ آمده است.



۱ با توجه به علامت عبارت $x^۲-۴$ و استفاده از تعریف قدر مطلق، تابع $y=|x^۲-۴|$ را به‌صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

$$y=|x^۲-۴|=\begin{cases} x^۲-۴ & x^۲-۴\geq ۰ \\ -(x^۲-۴) & x^۲-۴<۰ \end{cases}$$

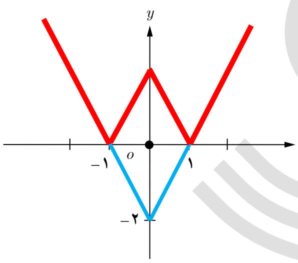
۲ نمودار $y=|x^۲-۴|$ را رسم کنید.

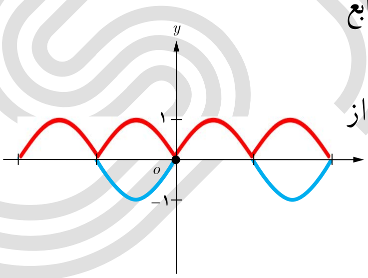
۳ تابع $y=|f(x)|$ را به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای بنویسید.

$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & ,f(x)\geq ۰ \\ -f(x) & ,f(x)<۰ \end{cases}$$

۴ با توجه به قسمت‌های قبل یک روش رسم برای تابع $y=|f(x)|$ از روی نمودار $y=f(x)$ بیان کنید.

۵ در شکل‌های روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y=|f(x)|$ را از روی نمودار تابع $y=f(x)$ رسم کنید.





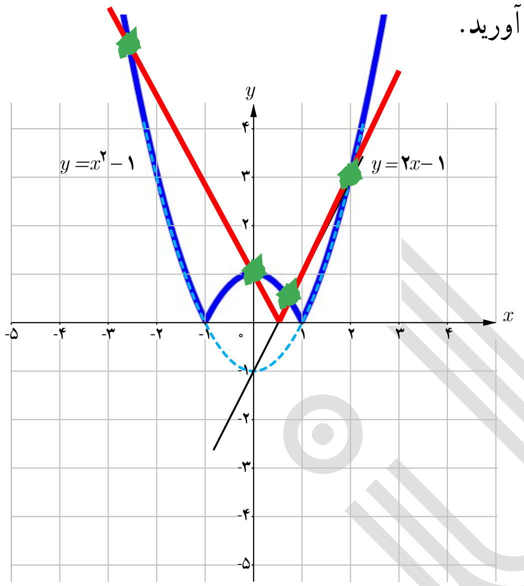
با توجه به فعالیت بالا :

۱ نمودار $y=-f(x)$ قرینه نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور x هاست.

۲ برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور x هاست، تصویر آینه‌وار نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

کار در کلاس

۱ با استفاده از شکل زیر نمودار توابع $y=|2x-1|$ و $y=|x^2-1|$ را رسم کنید و تعداد جواب‌های معادله $|x^2-1|=|2x-1|$ و مقدار تقریبی جواب‌ها را به‌دست آورید.



معادله ۴ جواب دارد:

دو جواب را می توان به طور دقیق تعیین نمود:

$x=2 \quad , \quad x=0$

دو جواب دیگر را به طور تقریبی می توان مشخص نمود:

یک جواب بین ۰ و ۱

یک جواب هم بین ۲− و ۳−

۲ به روش جبری و با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق معادله $|x^2-1|=|2x-1|$ را حل کنید.

حالت اول: $x^2-1=2x-1 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=2$

حالت دوم: $x^2-1=-(2x-1) \Rightarrow x^2+2x-2=0 \quad : \quad \Delta=4+8=12=4\times 3$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}=\begin{cases} x=-1+\sqrt{3}\simeq 0/73 \\ x=-1-\sqrt{3}\simeq -2/73 \end{cases}$$

تمرین

۱ با استفاده از تعیین علامت، ضابطه هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف) $f(x)=x|x|=\begin{cases} x(x)=x^2 & x\geq 0 \\ x(-x)=-x^2 & x<0 \end{cases}$

ب) $g(x)=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & x\leq -1 \text{ یا } x\geq 1 \\ -x^2+1 & -1<x<1 \end{cases}$

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

پ) $h(x)=|x-1|+|x+1|$

x		-1		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$

اگر $x\leq -1 \quad : \quad h(x)=-x+1+(-x-1)=-2x$

اگر $-1<x<1 \quad : \quad h(x)=-x+1+x+1=2$

اگر $x\geq 1 \quad : \quad h(x)=x-1+x+1=2x$

$$\Rightarrow \quad h(x)=\begin{cases} -2x & x\leq -1 \\ 2 & -1<x<1 \\ 2x & x\geq 1 \end{cases}$$

---

۲ چه نقاطی از محور طول‌ها وجود دارند که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه به طول‌های ۱- و ۳ روی محور xها برابر ۶ شود.

فرض می کنیم طول نقطه ی مورد نظر x باشد. داریم:

$$|x+1|+|x-3|=6$$

چون فاصله ی بین ۳ و ۱ – برابر ۴ هست؛ لذا x یا بزرگتر از ۳ هست و یا کوچکتر از ۱ – :

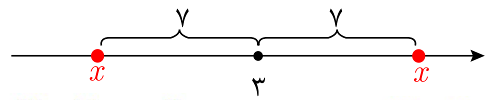
$x>3 \quad : \quad x+1+x-3=6 \quad \Rightarrow \quad 2x=8 \quad \Rightarrow \quad x=4$ ق ۰ ق

$x<-1 \quad : \quad -x-1-x+3=6 \quad \Rightarrow \quad -2x=4 \quad \Rightarrow \quad x=-2$ ق ۰ ق

در نتیجه نقاط مورد نظر عبارتند از: $\begin{vmatrix} 4 \\ 0 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} -2 \\ 0 \end{vmatrix}$

۳ عبارات زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به‌صورت یک معادله یا نامعادله نوشته و جواب آن را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است. $|x-۳|=۷$



جواب را می توان طبق نمودار روبرو به راحتی به دست آورد:

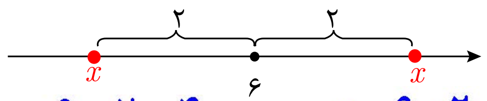
$x=۳-۷=-۴$ $\quad$ $x=۳+۷=۱۰$

روش جبری:

$$|x-۳|=۷ \Rightarrow \begin{cases} x-۳=۷ \Rightarrow x=۳+۷=۱۰ \\ x-۳=-۷ \Rightarrow x=۳-۷=-۴ \end{cases}$$

ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است.

$۲|x-۶|=۴ \Rightarrow |x-۶|=۲$



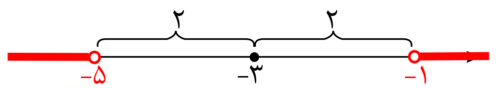
$x=۶-۲=۴$ $\quad$ $x=۶+۲=۸$

روش جبری:

$$|x-۶|=۲ \Rightarrow \begin{cases} x-۶=۲ \Rightarrow x=۶+۲=۸ \\ x-۶=-۲ \Rightarrow x=۶-۲=۴ \end{cases}$$

پ) فاصله بین x و ۳- بزرگتر از ۲ است.

$|x-(-۳)|>۲ \Rightarrow |x+۳|>۲$



$x<-۵$ $\quad$ $x>-۱$

روش جبری:

$$|x+۳|>۲ \Rightarrow \begin{cases} x+۳>۲ \Rightarrow x>-۱ \\ x+۳<-۲ \Rightarrow x<-۵ \end{cases}$$

---

۴ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\dfrac{۲-x}{|x-۳|}=۱$

$\xrightarrow{x\neq ۳} |x-۳|=\overbrace{۲-x}^{\text{نامنفی}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۳=۲-x \Rightarrow ۲x=۵ \Rightarrow x=\frac{۵}{۲} \text{ غ . ق . ق} \\ x-۳=-۲+x \Rightarrow -۳=-۲ \text{ غیر ممکن هست.} \end{cases}$$

در نتیجه معادله جوابی ندارد.

ب) $\sqrt{x^۲-۲x+۱}=۲x+۱$

$\Rightarrow \sqrt{(x-۱)^۲}=۲x+۱ \Rightarrow |x-۱|=\overbrace{۲x+۱}^{\text{نامنفی}}$

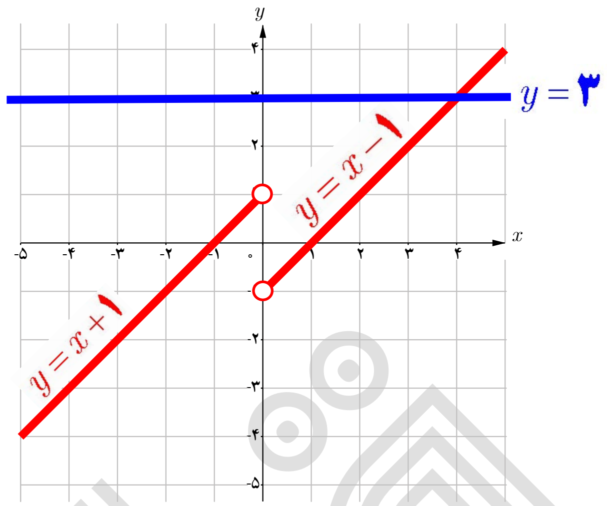
$$\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۲x+۱ \Rightarrow x=-۲ \text{ غ . ق . ق} \\ x-۱=-۲x-۱ \Rightarrow ۳x=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ ق . ق} \end{cases}$$

تذکر: معادلات بالا را می توان به روش های زیر هم حل نمود:

۱- با استفاده از تعریف قدر مطلق $\qquad$ **۲- با به توان ۲ رساندن دو طرف معادله**

۳- به روش هندسی

۵ نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید سپس به ازای $y=۳$ معادلات به‌دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.



الف) $y=x-\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases} x-\dfrac{x}{x}=x-۱ & x>۰ \\ x-\dfrac{x}{-x}=x+۱ & x<۰ \end{cases}$

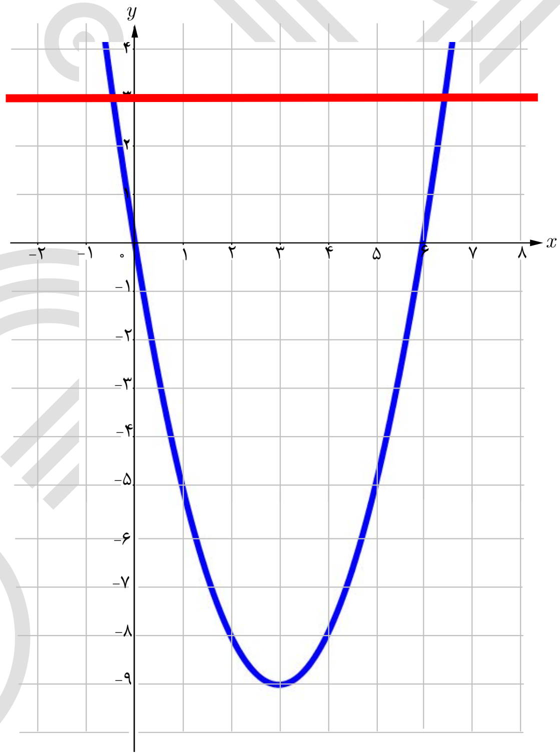
با توجه به نمودار؛ معادله یک جواب دارد: $x=۴$

روش جبری:

$$x-\frac{x}{|x|}=۳$$

$x>۰ \;:\; x-\dfrac{x}{x}=۳ \Rightarrow x-۱=۳ \Rightarrow x=۴$ ق · ق

$x<۰ \;:\; x-\dfrac{x}{-x}=۳ \Rightarrow x+۱=۳ \Rightarrow x=۲$ غ · ق · ق



ب) $y=x^۲-۶x=x(x-۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۶ \end{cases}$

معادله ۲ جواب دارد:

یک جواب بین ۰ و ۱−

یک جواب هم بین ۶ و ۷

روش جبری:

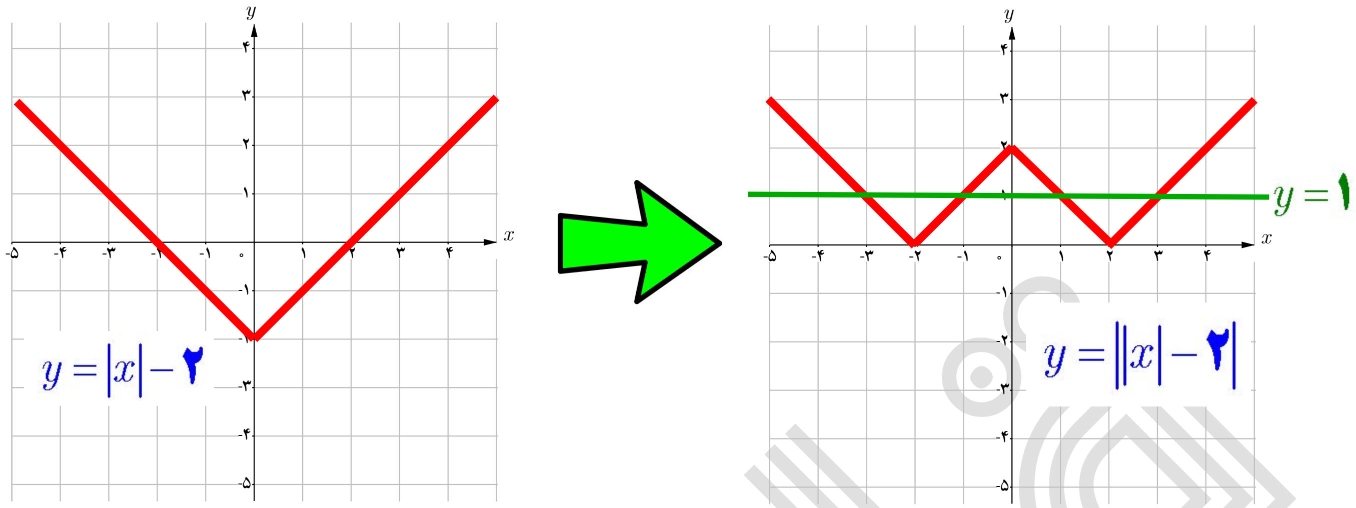
$$x^۲-۶x=۳ \Rightarrow x^۲-۶x-۳=۰$$

$$\Delta=۳۶+۱۲=۴۸=۱۶\times ۳$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۶\pm ۴\sqrt{۳}}{۲}=۳\pm ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۳+۲\sqrt{۳}\simeq ۶/۴۶ \\ x=۳-۲\sqrt{۳}\simeq -۰/۴۶ \end{cases}$$

۶ ابتدا نمودار تابع $f(x)=||x|-۲|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x)=۱$ را به روش هندسی و جبری حل نمایید.



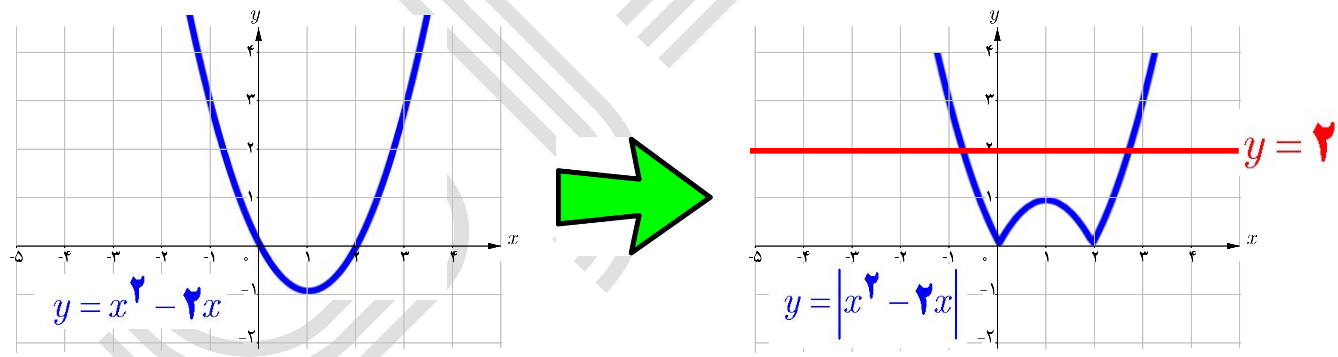
با توجه به نمودار؛ معادله ۴ جواب دارد: $-۳\ ,\ -۱\ ,\ ۱\ ,\ ۳$

روش جبری:

$$||x|-۲|=۱ \Rightarrow \begin{cases} |x|-۲=۱ \Rightarrow |x|=۳ \Rightarrow x=\pm ۳ \\ |x|-۲=-۱ \Rightarrow |x|=۱ \Rightarrow x=\pm ۱ \end{cases}$$

---

۷ ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۲x|$ را رسم کنید سپس به روش هندسی معادله $|x^۲-۲x|=۲$ را حل نمایید.



معادله ۲ جواب دارد: یک جواب بین ۰ و -۱ ؛ یک جواب هم بین ۲ و ۳

روش جبری:

$$|x^۲-۲x|=۲ \Rightarrow \begin{cases} x^۲-۲x=۲ \Rightarrow x^۲-۲x-۲=۰ \ :\ \Delta=۴+۸=۱۲ \ * \\ x^۲-۲x=-۲ \Rightarrow x^۲-۲x+۲=۰ \ :\ \Delta=۴-۸=-۴ \end{cases}$$

ریشه حقیقی ندارد

$$\overset{*}{\Rightarrow}\ x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۲\pm ۲\sqrt{۳}}{۲}=۱\pm\sqrt{۳} \Rightarrow \begin{cases} x=۱+\sqrt{۳}\simeq ۲/۷۳ \\ x=۱-\sqrt{۳}\simeq -۰/۷۳ \end{cases}$$

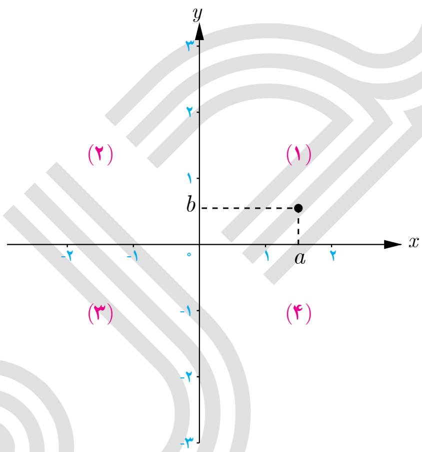
درس ۵

آشنایی با هندسه تحلیلی

در سال‌های گذشته با دستگاه محورهای مختصات آشنا شدید. یک دستگاه مختصات دکارتی شامل دو محور عمود بر هم از اعداد حقیقی است که محورهای مختصات نامیده می‌شود و در مبدأ یکدیگر را قطع می‌کنند. محور افقی را محور xها (طول‌ها) و محور عمودی را محور yها (عرض‌ها) می‌نامند. این محورهای مختصات صفحه مختصات (یا صفحه xy) را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود و نقاط روی محورها در هیچ ربعی نیستند.

برای هر نقطهٔ P یک زوج مرتب $(a\,,\,b)$ وجود دارد که مختصات نقطه P نامیده می‌شود. طول نقطه P را با x_p و عرض نقطه p را با y_p نشان می‌دهیم.

در این بخش با برخی از نکات در رابطه با مختصات نقاط در صفحه آشنا می‌شویم.



هندسه تحلیلی

هندسه تحلیلی شاخه‌ای از ریاضیات است که از ترکیب هندسه و جبر مقدماتی به‌وجود آمده است. در این رشته اشکال هندسی و روابط بین آنها را با مقادیر و معادلات عددی و جبری بیان می‌کنند.

بنیان‌گذاران این مبحث دکارت و فرما در قرن ۱۷ میلادی بوده‌اند.

این رشته در مورد اندازه، فاصله و زاویه و فرمول‌های مربوط به آن بحث می‌کند.

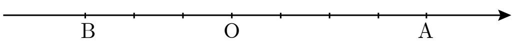
منبع دانش‌نامه رشد.

[به نقل از ویکی پدیا]

فاصله بین دو نقطه

فعالیت

روی محور اعداد مبدأ را با O و نقطه متناظر ۴ را با A و نقطه متناظر ۳- را با B مشخص کرده‌ایم.



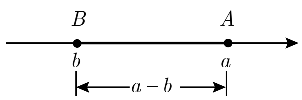
۱ طول پاره‌خط‌های OA و OB چقدر است؟ $|OA|=۴$, $|OB|=۳$

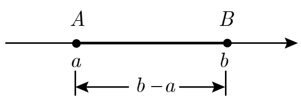
۲ طول پاره‌خط AB چقدر است؟ $|AB|=۷$

۳ فاصله دو نقطه A و B متناظر با ۴ و (۳-) از یکدیگر چقدر است؟ ۷

۴ با توجه به محورهای زیر در مورد فاصله بین دو نقطه A و B چه می‌توان گفت؟

$$|AB|=|x_B-x_A|=|x_A-x_B|$$



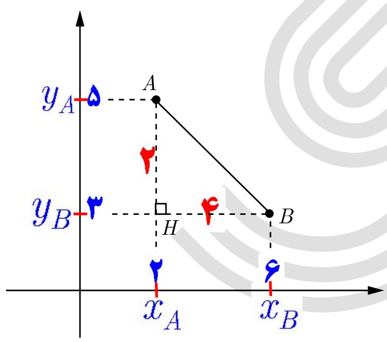


اگر طول نقاط متناظر با A و B روی محور اعداد را به ترتیب با x_A و x_B نشان دهیم، در این صورت فاصله بین A و B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنند.

$AB=|x_B-x_A|$

فعالیت

۱ دو نقطه $A(۲,۵)$ و $B(۶,۳)$ را در شکل روبه‌رو، در نظر بگیرید :

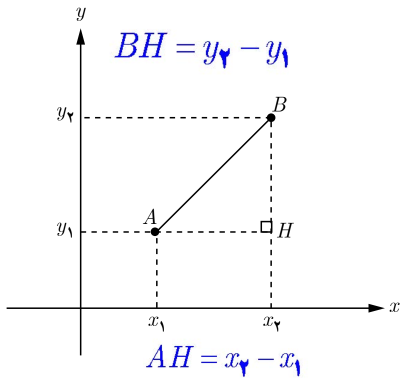


الف) روی محور افقی x_A و x_B و روی محور عمودی y_A و y_B را مشخص کنید.

ب) با توجه به مثلث قائم‌الزاویه AHB ($\hat{H}=۹۰^\circ$) و رابطه فیثاغورس، طول پاره‌خط AB را به‌دست آورید.

$$AB^۲=AH^۲+BH^۲=۲^۲+۴^۲=۲۰=۴\times ۵ \quad \Rightarrow \quad AB=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

۲ اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات باشند، با توجه به شکل روبه‌رو طول AB را محاسبه کنید.



$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

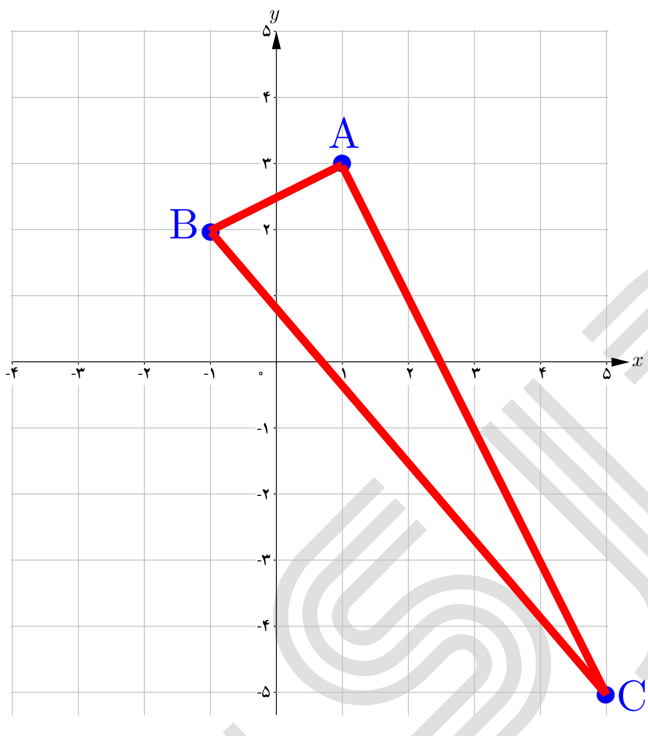
به‌طور کلی اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ باشند، آنگاه طول پاره‌خط AB برابر است با :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

کار در کلاس

سه نقطه $A(1,3)$، $B(-1,2)$ و $C(5,-5)$ سه رأس مثلث ABC هستند.

الف) مثلث را رسم کنید.



ب) طول اضلاع مثلث را به‌دست آورید.

$$AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \qquad AC = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$$

$$BC = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}$$

پ) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

$$BC^2 \overset{?}{=} AC^2 + BC^2 \quad : \quad 85 \overset{?}{=} 80 + 5 \quad : \quad 85 = 85 \checkmark$$

چون رابطه فیثاغورس برقرار است ؛
لذا مثلث ABC در رأس A قائمه الزاویه است.

ت) شیب دو خط AB و AC را به‌دست آورید.
چه رابطه‌ای بین دو شیب مشاهده می‌کنید؟

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-3}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-5-3}{5-1} = \frac{-8}{4} = -2$$

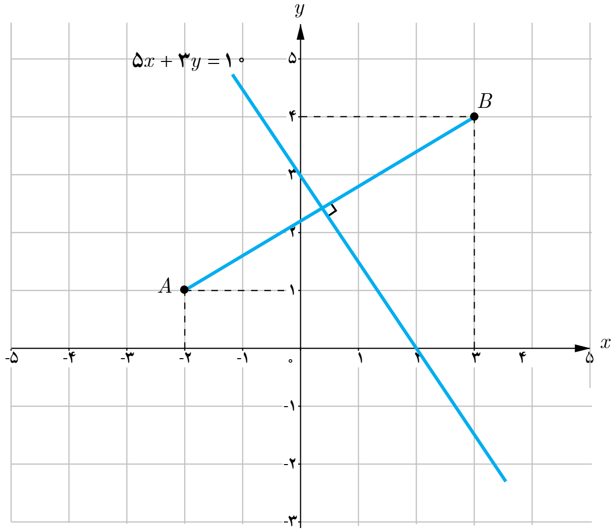
$$\Rightarrow \quad m_{AB} \times m_{AC} = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

به عبارت دیگر؛ شیب های دو خط عمود برهم؛ معکوس و قرینه ی یکدیگرند.

مثال : معادله عمودمنصف پاره‌خطی که نقاط $A(-۲,۱)$ و $B(۳,۴)$ را به هم وصل می‌کند را بیابید.

حل : عمودمنصف یک پاره‌خط شامل همه نقاطی است که فاصله آنها از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است. بنابراین اگر $PA=PB$ آنگاه P روی عمودمنصف AB قرار دارد. فرض کنیم $P(x,y)$ آنگاه با استفاده از فرمول فاصله پاره‌خط می‌توان نوشت :

$$\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۱)^۲}=\sqrt{(x-۳)^۲+(y-۴)^۲}$$



با به توان دو رساندن طرفین و ساده کردن داریم :

$۵x+۳y=۱۰$

این معادله برای تمام نقاط هم‌فاصله از A و B برقرار است بنابراین، معادله عمودمنصف AB است.

در مثال بالا شیب خط AB برابر $\frac{۳}{۵}$ و شیب خط عمودمنصف آن برابر $\frac{-۵}{۳}$ است. چه رابطه‌ای بین این دو شیب مشاهده می‌شود؟

حاصلضربشان ۱- می شود؛ به عبارت دیگر قرینه و معکوس یکدیگرند.

به‌طور کلی :

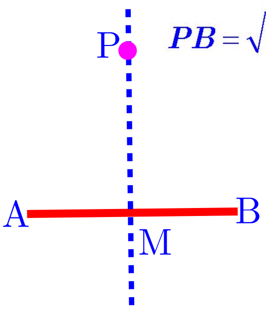
اگر خطوط d و d' به ترتیب با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند آنگاه $mm'=-۱$ و برعکس.

کار در کلاس

به دو روش نشان دهید نقطه $P(-۱۲,۱۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه $A(۰,-۳)$ و $B(۶,۱۵)$ قرار دارد.

روش اول:

$$PA=\sqrt{۱۸^۲+۴^۲}=\sqrt{۳۴۰}$$
$$PB=\sqrt{۱۲^۲+۱۴^۲}=\sqrt{۳۴۰}$$
$$\Rightarrow PA=PB$$



چون فاصلهٔ نقطهٔ P از دو سر پاره خط AB به یک اندازه است ؛ لذا P روی عمودمنصف AB قرار دارد.

روش دوم: ابتدا معادله خط عمود منصف AB را به دست می آوریم:

$$m_{AB}=\frac{۱۵-(-۳)}{۶-۰}=\frac{۱۸}{۶}=۳ \Rightarrow m_{\text{عمود منصف}}=\frac{-۱}{۳}$$

وسط AB $\;M\left|\begin{array}{l}\frac{۶+۰}{۲}=۳\\ \frac{۱۵-۳}{۲}=۶\end{array}\right.$

$$y-۶=\frac{-۱}{۳}(x-۳) \Rightarrow \boxed{y=\frac{-۱}{۳}x+۷ \quad \text{معادلهٔ عمودمنصف}}$$

$$P\left|\begin{array}{l}-۱۲=x\\ ۱۱=y\end{array}\right. : ۱۱\overset{?}{=}\frac{-۱}{۳}(-۱۲)+۷ \Rightarrow ۱۱\overset{?}{=}۴+۷ \Rightarrow ۱۱=۱۱ \checkmark$$

در نتیجه نقطهٔ P روی عمود منصف AB است.

یک روش دیگر:

$$m_{AB}=\frac{۱۵-(-۳)}{۶-۰}=\frac{۱۸}{۶}=۳$$

وسطAB $\;M\left|\begin{array}{l}۳\\ ۶\end{array}\right. \Rightarrow m_{PM}=\frac{۶-۱۱}{۳-(-۱۲)}=\frac{-۵}{۱۵}=\frac{-۱}{۳}$

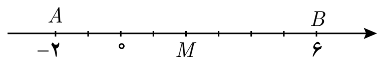
$$m_{AB}\times m_{PM}=-۱ \Rightarrow PM\perp AB$$

در نتیجه PM عمود منصف AB است.

مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط

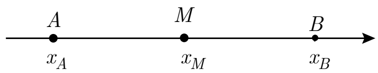
فعالیت

۱ در شکل زیر نقطه M وسط پاره‌خط AB است. طول نقطه M چقدر است؟ $x_M = ۲$



۲ چه ارتباطی بین طول نقطه M و طول نقاط A و B مشاهده می‌کنید؟ طول نقطهٔ **M** میانگین طول نقطه های **A** و **B** است.

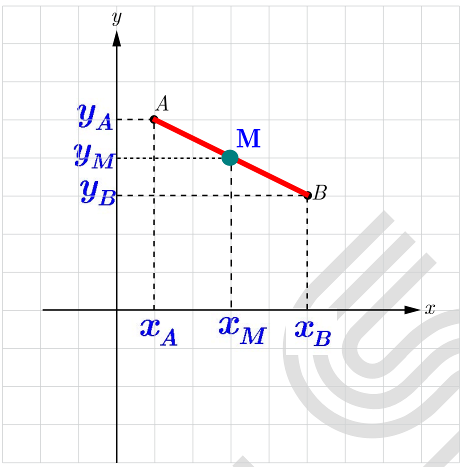
۳ اگر A و B دو نقطه دلخواه روی محور xها و M وسط AB باشد، طول نقطه M را برحسب طول‌های نقاط A و B به‌دست آورید.



$$AM=MB \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow ۲x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

۴ اگر A و B روی محور yها و عرض نقاط A و B را با y_A و y_B نشان دهیم و M وسط پاره‌خط AB باشد، چه دستوری برای محاسبه عرض نقطه M می‌توان بیان کرد؟ $y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$

کاردرکلاس



اگر $A(۱,۵)$ و $B(۵,۳)$ دو سر پاره‌خط AB و $M(a,b)$ وسط پاره‌خط AB باشد :

الف) تصویر نقاط A و B و M را روی محور مختصات مشخص کنید.

ب) با توجه به تصویر نقاط A و B و M روی محورها مختصات نقطه M را به‌دست آورید.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۱+۵}{۲} = ۳ \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۵+۳}{۲} = ۴$$

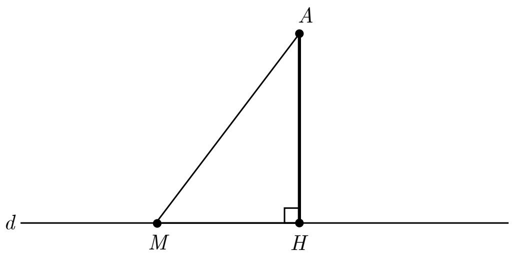
اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات و M وسط AB باشد. مختصات نقطه M برابر است با :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \quad , \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$$

فاصله یک نقطه از یک خط

اگر خط d و نقطه A در خارج آن داده شده باشد، فاصله نقطه A از خط d را همان کوتاه‌ترین فاصله A از d تعریف می‌کنیم. با توجه به آنکه طول عمود از طول مایل کوتاه‌تر است (چرا؟) این فاصله را عمود AH در نظر می‌گیریم.

بنابراین برای به‌دست آوردن فاصله نقطه از خط کافی است از آن نقطه بر خط عمود رسم کرده و طول پاره‌خط عمود شده را اندازه‌گیری کنیم.



فعالیت

خط d به معادله $۳x+۴y=۱۲$ و نقطه $A(۲,۵)$ در شکل زیر داده شده است.

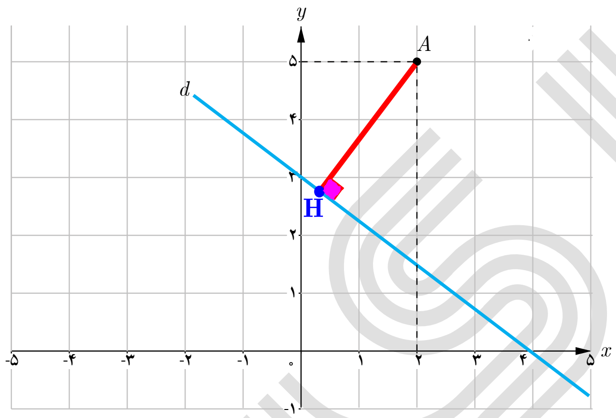
۱ عمود AH را بر خط d رسم کنید.

۲ رابطه بین شیب‌های خطوط d و AH را به‌دست آورید. $AH \perp d \Rightarrow m_d \times m_{AH} = -۱$

۳ شیب AH را به‌دست آورده و معادله خط AH را بنویسید.

۴ دستگاه متشکل از دو خط d و AH را تشکیل دهید و مختصات محل برخورد دو خط (نقطه H) را به‌دست آورید.

۵ طول پاره‌خط AH را محاسبه کنید.



$$m_d = \frac{-۳}{۴} \Rightarrow m_{AH} = \frac{۴}{۳}$$

$$y-۵ = \frac{۴}{۳}(x-۲) \xrightarrow{\times ۳} ۳y-۱۵ = ۴x-۸$$

$$\Rightarrow ۴x-۳y=-۷ \quad \text{AH} \text{ معادله خط}$$

$$\begin{cases} ۳x+۴y=۱۲ \\ ۴x-۳y=-۷ \end{cases} \Rightarrow x=\frac{۸}{۲۵} \quad , \quad y=\frac{۶۹}{۲۵}$$

$$AH = \sqrt{(۲-\frac{۸}{۲۵})^۲ + (۵-\frac{۶۹}{۲۵})^۲} = \sqrt{\frac{۱۷۶۴+۳۱۳۶}{۲۵^۲}} = \frac{۷۰}{۲۵} = ۲/۸$$

به‌طور کلی اگر بخواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_\circ, y_\circ)$ از خط $ax+by+c=\circ$ را به‌دست آوریم، با استفاده از مراحل فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت طول عمود AH برابر است با :

$$AH=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

که در آن علامت قدرمطلق در صورت کسر برای نامنفی شدن مقدار AH می‌باشد.[۱]

✤ **مثال :** فاصله نقطه $A(-۲,۴)$ از خط $y=\frac{۴}{۳}x+۴$ را به‌دست آورید.

✤ **حل :** ابتدا معادله خط را به‌صورت $۴x-۳y+۱۲=\circ$ می‌نویسیم. طبق فرمول فاصله نقطه از خط فاصله نقطه A تا خط d را AH فرض کرده و داریم :

$$AH=\frac{|۴(-۲)-۳(۴)+۱۲|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{|-۸|}{۵}=\frac{۸}{۵}$$

✤ **مثال :** فاصله نقطه $A(۱ \text{ و } -۴)$ از خط $۸x+۶y=k$ برابر ۴ است. مقدار k چقدر است؟

✤ **حل :** ابتدا معادله خط را به‌صورت $۸x+۶y-k=\circ$ می‌نویسیم. مطابق فرمول فاصله نقطه از خط داریم :

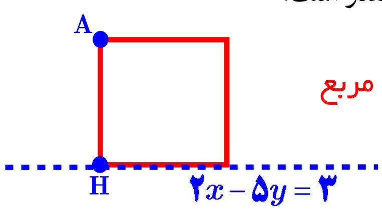
$$AH=\frac{|۸(۱)+۶(-۴)-k|}{\sqrt{۸^۲+۶^۲}}\Rightarrow ۴=\frac{|-۱۶-k|}{۱\circ}\Rightarrow|-۱۶-k|=۴\circ$$

$$-۱۶-k=۴\circ\Rightarrow k=-۵۶$$
$$-۱۶-k=-۴\circ\Rightarrow k=۲۴$$

کار در کلاس

$۲x-۵y-۳=\circ$

۱ درصورتی که $A(۲,۳)$ رأس یک مربع و معادله یک ضلع آن $۲x-۵y=۳$ باشد، مساحت این مربع چقدر است؟

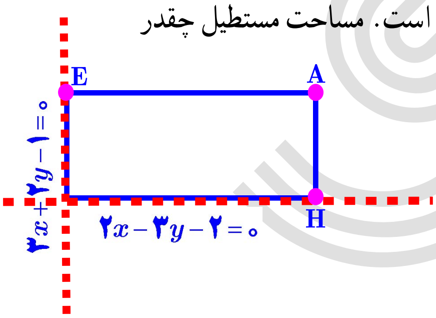


ضلع مربع : $AH=\frac{|۲(۲)-۵(۳)-۳|}{\sqrt{۲^۲+۵^۲}}=\frac{۱۴}{\sqrt{۲۹}} \Rightarrow S=\frac{۱۴}{\sqrt{۲۹}}\times\frac{۱۴}{\sqrt{۲۹}}=\frac{۱۹۶}{۲۹}$

$۳x+۲y-۱=\circ$

۲ خطوط $۳x+۲y=۱$ و $۲x-۳y=۲$ معادلات دو ضلع یک مستطیل و $A(۲,۵)$ یک رأس آن است. مساحت مستطیل چقدر است؟

$۲x-۳y-۲=\circ$



$$AH=\frac{|۲(۲)-۳(۵)-۲|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}} \qquad AE=\frac{|۳(۲)+۲(۵)-۱|}{\sqrt{۳^۲+۲^۲}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۱۳}}$$

$$S=AH\times AE=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۱۵}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۱۳\times۱۵}{۱۳}=۱۵$$

۱ــ از اثبات فرمول به دلیل طولانی شدن صرف نظر می‌شود. دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانند به اثبات آن بپردازند.

تمرین

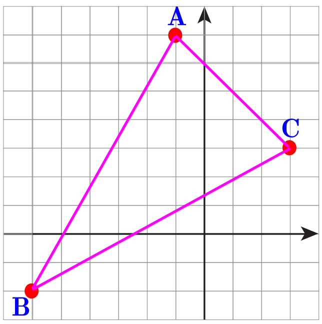
۱ مثلث ABC با رأس‌های $A(-1,7)$ و $B(-6,-2)$ و $C(3,3)$ را در نظر بگیرید.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

پ) معادله عمودمنصف ضلع BC را به‌دست آورید.

ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟



$$AB=\sqrt{5^2+9^2}=\sqrt{106}$$
$$BC=\sqrt{9^2+5^2}=\sqrt{106}\quad\Rightarrow\quad AB=BC$$

در نتیجه مثلث ABC متساوی الساقین است.

پ)

$$M\left|\begin{array}{l}\frac{-6+3}{2}=\frac{-3}{2}\\[4pt] \frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}\end{array}\right.\quad \text{وسط BC}\qquad,\qquad m_{BC}=\frac{-2-3}{-6-3}=\frac{-5}{-9}=\frac{5}{9}\ \Rightarrow\ m_{\text{عمود منصف}}=\frac{-9}{5}$$

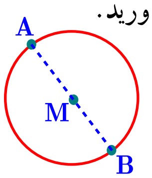
$$y-\frac{1}{2}=\frac{-9}{5}\left(x+\frac{3}{2}\right)\qquad \text{معادلهٔ عمودمنصف BC}$$

ت)

$$m_{BC}=\frac{5}{9}\ ,\ C\left|\begin{array}{l}3\\3\end{array}\right.\ :\ y-3=\frac{5}{9}(x-3)\xrightarrow{\times 9}9y-27=5x-15\ \Rightarrow\ 5x-9y+12=0\quad \text{معادلهٔ خط BC}$$

$$AH=\frac{|5(-1)-9(7)+12|}{\sqrt{5^2+9^2}}=\frac{56}{\sqrt{106}}$$

۲ نقاط $A(0,6)$ و $B(8,-8)$ نقاط انتهای قطر یک دایره می‌باشند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به‌دست آورید.



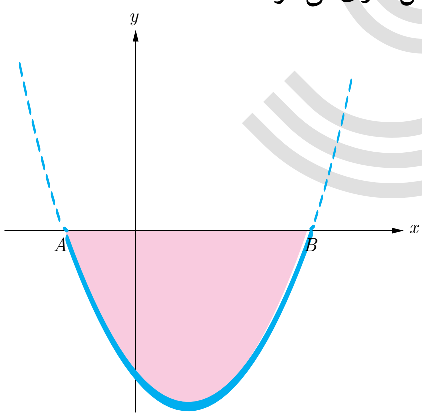
$$\text{وسط AB}\ M\left|\begin{array}{l}\frac{0+8}{2}=4\\[4pt] \frac{6+(-8)}{2}=-1\end{array}\right.\ \Rightarrow\ M\left|\begin{array}{l}4\\-1\end{array}\right.\ \text{مرکز دایره}\qquad \text{شعاع دایره}\ MA=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}$$

۳ شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله $y=x^2-8x-20$ مطابق شکل زیر مدل‌سازی می‌شود.

الف) مختصات نقاط انتهای عدسی A و B را به‌دست آورید.

ب) اگر x برحسب سانتی‌متر باشد طول AB را به‌دست آورید.

پ) اگر عدسی کاملاً متقارن باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟



الف)

$$x^2-8x-20=0\ \Rightarrow\ (x-10)(x+2)=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=10\\x=-2\end{cases}\ \Rightarrow\ A\left|\begin{array}{l}-2\\0\end{array}\right.\ ,\ B\left|\begin{array}{l}10\\0\end{array}\right.$$

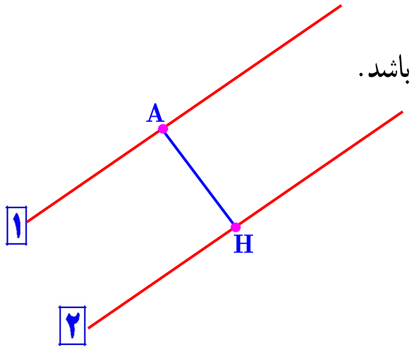
ب)

$$AB=|10-(-2)|=12$$

پ)

$$x_{\text{رأس سهمی}}=\frac{-b}{2a}=\frac{8}{2}=4\ \Rightarrow\ y_{\min}=(4)^2-8(4)-20=-36$$

$$\text{بیشترین ضخامت عدسی}=|-36|=36$$



۴ ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ $\boxed{1}$ و $ax+by+c'=0$ $\boxed{2}$ برابر $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ می‌باشد.

کافی است یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خط ها در نظر بگیریم و فاصلهٔ آن را از خط دیگر بیابیم؛

فرض کنیم نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ روی خط $\boxed{1}$ باشد؛ در اینصورت داریم؛

$$ax_0+by_0+c=0 \Rightarrow ax_0+by_0=-c$$

$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-c+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

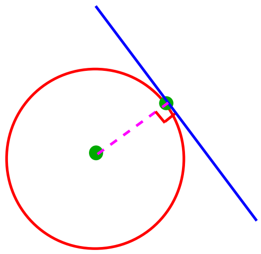
روشی دیگر:

نقطه ای به طول صفر روی خط $\boxed{1}$ در نظر می گیریم. در اینصورت خواهیم داشت؛

$$a(0)+by+c=0 \Rightarrow by=-c \Rightarrow y=\frac{-c}{b} \Rightarrow A\left|\begin{matrix}0\\ \frac{-c}{b}\end{matrix}\right. \qquad AH=\frac{\left|a(0)+b(\frac{-c}{b})+c'\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-c+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

---

۵ خط $4x+3y=5$ بر دایرهٔ C به مرکز $O(-1,2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

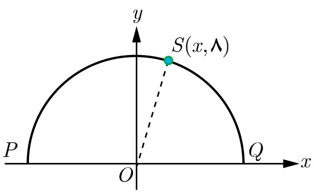


$$4x+3y-5=0$$

$$R=\frac{|4(-1)+3(2)-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{3}{5}$$

---

۶ نقطه $S(x,8)$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱۰ در شکل روبه‌رو داده شده است.



الف) مقدار x را به‌دست آورید. $R=OS=\sqrt{x^2+8^2}=10 \Rightarrow x^2=36 \Rightarrow x=6$

ب) شیب خط‌های PS و SQ را به‌دست آورید.

پ) نشان دهید $P\hat{S}Q$ قائم است.

$$S\left|\begin{matrix}6\\8\end{matrix}\right. , \quad P\left|\begin{matrix}-10\\0\end{matrix}\right. \Rightarrow m_{PS}=\frac{0-8}{-10-6}=\frac{-8}{-16}=\frac{1}{2}$$

$$S\left|\begin{matrix}6\\8\end{matrix}\right. , \quad Q\left|\begin{matrix}10\\0\end{matrix}\right. \Rightarrow m_{SQ}=\frac{0-8}{10-6}=\frac{-8}{4}=-2$$

$$m_{PS}\times m_{SQ}=\frac{1}{2}\times(-2)=-1 \Rightarrow PS\perp SQ \Rightarrow \widehat{PSQ}=90^\circ$$

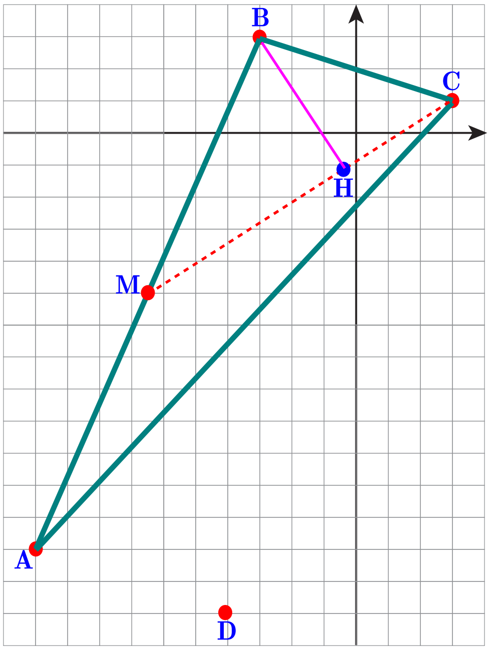
---

۷ اگر فاصله نقطه $A(1,2)$ از خط $ax+4y=1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

$$ax+4y-1=0$$

$$AH=\frac{|a(1)+4(2)-1|}{\sqrt{a^2+4^2}}=\frac{|a+7|}{\sqrt{a^2+16}}=2 \Rightarrow 2\sqrt{a^2+16}=|a+7| \Rightarrow \left(2\sqrt{a^2+16}\right)^2=|a+7|^2$$

$$\Rightarrow 4a^2+64=a^2+14a+49 \Rightarrow 3a^2-14a+15=0 \Rightarrow \frac{1}{3}(3a-9)(3a-5)=0 \Rightarrow \begin{cases}3a=9 \Rightarrow a=3\\ 3a=5 \Rightarrow a=\frac{5}{3}\end{cases}$$



۸ سه رأس مثلث ABC ، $A(-۱۰,-۱۳)$ ، $B(-۳,۳)$ ، $C(۳,۱)$ می‌باشند.

الف) طول عمودی که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می‌شود را به‌دست آورید.

ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.

AB وسط $M\left|\begin{array}{l}\dfrac{-۱۰-۳}{۲}=\dfrac{-۱۳}{۲}\\[2mm]\dfrac{-۱۳+۳}{۲}=-۵\end{array}\right.$ ، $m_{MC}=\dfrac{۱-(-۵)}{۳-(\frac{-۱۳}{۲})}=\dfrac{۶}{\frac{۱۹}{۲}}=\dfrac{۱۲}{۱۹}$

$$y-۱=\frac{۱۲}{۱۹}(x-۳)\ \Rightarrow\ ۱۹y-۱۹=۱۲x-۳۶$$

$$\Rightarrow\ ۱۲x-۱۹y-۱۷=۰$$ معادلهٔ خط میانهٔ CM

$$BH=\frac{|۱۲(-۳)-۱۹(۳)-۱۷|}{\sqrt{۱۲^۲+۱۹^۲}}=\frac{۱۱۰}{\sqrt{۵۰۵}}$$

ب)

می دانیم در هر متوازی الاضلاع؛ قطرها همدیگر را نصف می کنند؛ لذا وسط **AC** و وسط **BD** برهم منطبق هستند.

پس می توانیم بنویسیم:

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{-۳+x_D}{۲}\\[2mm]\dfrac{۳+y_D}{۲}\end{array}\right.=\left|\begin{array}{l}\dfrac{-۱۰+۳}{۲}\\[2mm]\dfrac{-۱۳+۱}{۲}\end{array}\right.\ \Rightarrow\ \begin{cases}-۳+x_D=-۷\ \Rightarrow\ x_D=-۴\\ ۳+y_D=-۱۲\ \Rightarrow\ y_D=-۱۵\end{cases}$$

---

۹ نقطه‌ای روی خط $y=۲x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبداء مختصات و نقطه $A(۲,۴)$ برابر ۵ باشد.

نقطهٔ M را روی خط $y=۲x$ در نظر می گیریم: $M\left|\begin{array}{l}x\\ ۲x\end{array}\right.\ :\ MO+MA=۵$

$$\Rightarrow\ \sqrt{x^۲+(۲x)^۲}+\sqrt{(x-۲)^۲+(۲x-۴)^۲}=۵\ \Rightarrow\ \sqrt{۵x^۲}+\sqrt{۵(x-۲)^۲}=۵$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{۵}|x|+\sqrt{۵}|x-۲|=۵\ \Rightarrow\ |x|+|x-۲|=\sqrt{۵}$$

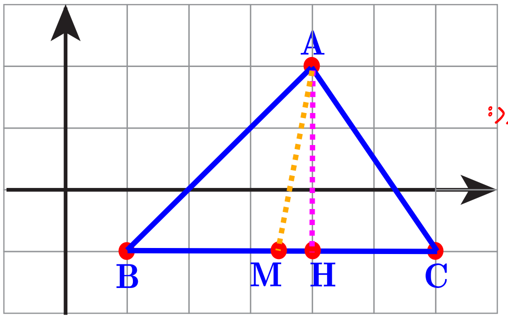
اگر $x<۰\ :\ -x-x+۲=\sqrt{۵}\ \Rightarrow\ ۲x=۲-\sqrt{۵}\ \Rightarrow\ x=۱-\dfrac{\sqrt{۵}}{۲}$ ق . ق

اگر $۰\le x\le ۲\ :\ x-x+۲=\sqrt{۵}\ \Rightarrow\ ۲=\sqrt{۵}$ غیر ممکن است.

اگر $x>۲\ :\ x+x-۲=\sqrt{۵}\ \Rightarrow\ ۲x=۲+\sqrt{۵}\ \Rightarrow\ x=۱+\dfrac{\sqrt{۵}}{۲}$ ق . ق

$$\Rightarrow\ M\left|\begin{array}{l}۱-\dfrac{\sqrt{۵}}{۲}\\ ۲-\sqrt{۵}\end{array}\right.\quad \text{یا}\quad M\left|\begin{array}{l}۱+\dfrac{\sqrt{۵}}{۲}\\ ۲+\sqrt{۵}\end{array}\right.$$

۱۰ نقاط $A(۴,۲)$ و $B(۱,-۱)$ و $C(۶,-۱)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را به‌دست آورید.



با توجه به شکل روبرو؛ **BC** موازی محور طولها و **AH** عمود بر آن است؛ لذا می توان مختصات نقطهٔ **H** را به صورت زیر به دست آورد:

$$H\begin{vmatrix} ۴ \\ -۱ \end{vmatrix}$$

همچنین **M** وسط **BC** است؛ پس:

$$M\begin{vmatrix} \frac{۶+۱}{۲}=\frac{۷}{۲} \\ \frac{-۱+(-۱)}{۲}=-۱ \end{vmatrix} \Rightarrow M\begin{vmatrix} \frac{۷}{۲} \\ -۱ \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow MH=\left|۴-\frac{۷}{۲}\right|=\frac{۱}{۲}$$